

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Котуннелирование и поляронный эффект в
гранулированных системах»
(Дипломная работа бакалавра)

студента 222 группы
Сивака В.В.
научный руководитель
д.ф.-м.н., Иоселевич А.С.

Черноголовка 2016

Оглавление

Оглавление	1
1 Введение	3
1.1 Котуннелирование с переменной длиной прыжка	3
1.2 Жесткая щель и поляронный эффект в системах с однородным беспорядком	4
1.3 Поляронный эффект в гранулированных системах	5
2 Модель динамических флуктуаций беспорядка, обусловленных колебаниями заряженных примесей	7
2.1 Классическое основное состояние	8
2.2 Низкоэнергетический гамильтониан и поляронный эффект	9
2.3 Термодинамические энергии возбуждений	10
2.3.1 Одночастичные возбуждения	10
2.3.2 Двухчастичные возбуждения	11
2.3.3 Потенциальный барьер между резонансными состояниями	11
2.4 Модель с короткодействующим взаимодействием	12
3 Частота переходов	14
3.1 Принцип Франка-Кондона и условие его применимости	14
3.2 Гамильтониан и качественные соображения	15
3.2.1 Амплитуда многократного котуннелирования: теория возмущений	16
3.3 Усреднение частоты переходов	18
3.3.1 Термодинамическое усреднение	18
3.3.2 Самоусреднение для промежуточных гранул	19
3.3.3 Термодинамическое усреднение – продолжение	20
3.4 Частота переходов при разной силе поляронного эффекта	22
3.4.1 Слабый поляронный эффект: электронные прыжки	23
3.4.2 Сильный поляронный эффект: поляронные прыжки	24
3.4.3 Переходная область	24
3.5 Физическая картина поляронных прыжков	25
3.5.1 Главная температурная зависимость: сходство со стандартными поляронами	25
3.5.2 Специфика неупругого котуннелирования: отличие от стандартных поляронов	26

4	Проводимость в модели короткодействующего взаимодействия	27
4.1	Перколяция	28
4.1.1	Невозмущенная задача: классические поляроны	29
4.1.2	Определение параметра \mathcal{L} с помощью метода возмущений в перколяции	31
5	Системы с дальнодействием	33
5.1	Матрица взаимодействия	33
5.1.1	Главное приближение	34
5.1.2	Противоречивость главного приближения в низкоразмерных случаях	35
5.1.3	Двумерный случай: переход от 2D к 3D электростатике	36
5.2	Частота переходов	38
5.3	Кулоновская щель в плотности состояний	39
5.4	Проводимость	40
6	Заключение	41
6.1	Что уже удалось сделать	41
6.2	Что еще предстоит сделать	41
6.3	Благодарности	42
7	Список литературы	43

Глава 1

Введение

“Растянутая” экспоненциальная (stretched exponential) зависимость от температуры

$$\sigma \propto \exp\{-(T_0/T)^\alpha\} \quad (1.1)$$

характерна для прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка (variable range hopping, VRH) в однородно неупорядоченных материалах (например, аморфных твердых телах [1] или легированных полупроводниках [2]) при низких температурах. В случае, когда дальнедействующее взаимодействие не играет большой роли, экспонента $\alpha = 1/(d + 1)$ (где d есть размерность пространства), $T_0 \equiv T_M \sim [\nu_F \xi^d]^{-1}$ (где ν_F есть плотность состояний на уровне Ферми и ξ есть характерная длина затухания волновой функции), и соответствующая зависимость известна как закон Мотта [3]. В противном случае, когда дальнедействующий Кулон существенен и приводит к мягкой Кулоновской щели в электронной плотности состояний [4], экспонента $\alpha = 1/2$, $T_0 \equiv T_{ES} \sim e^2/\kappa\xi$ (где κ есть диэлектрическая постоянная), и эта зависимость называется законом Эфроса-Шкловского.

1.1 Котуннелирование с переменной длиной прыжка

Похожее поведение проводимости также наблюдалось в массивах металлических и полупроводниковых квантовых точек в диапазоне температур 1 – 200К (см. обзоры [5, 6] и некоторые старые [7] и более свежие [8] экспериментальные статьи). Объяснение “растянутой” экспоненты в зависимости проводимости от температуры в гранулированных материалах привлекло большое внимание теоретиков. Многие из первоначальных теорий [9] были основаны на специальных искусственных предположениях о распределении случайных параметров гранул (размеров и т.д.) и критиковались – см., например, [10], из-за их *ad hoc* характера и отсутствия общности. Некоторые другие теории [11, 12] правильно указывали на важную роль последовательного туннелирования электронов через цепочку промежуточных гранул, но не давали правильного многочастичного описания этого туннелирования и правильного рецепта для вычисления амплитуды туннелирования. Такой рецепт был разработан в работе [13], где простая идея, предложенная в [11], была обобщена с учетом многочастичного характера процесса (то есть, котуннелирования, см. [14, 15]) и Кулоновских эффектов.

В противоположность обычному одночастичному сценарию VRH, где частица проходит от одного конца цепочки к другому, последовательно прыгая через все

промежуточные гранулы, сценарий многократного котуннелирования, разработанный в [13], включает все возможные последовательности прыжков между соседними гранулами в цепочке. Вообще говоря, эти прыжки осуществляются различными электронами; промежуточное состояние процесса включает много гранул с измененными зарядами. Однако, по окончании процесса, имеется всего один электрон, который оказался перенесенным между крайними гранулами цепочки, в то время как заряды всех промежуточных гранул приняли свои первоначальные значения. Это не значит, что все процессы с различными последовательностями прыжков ведут к одинаковому конечному состоянию системы: конечные состояния некоторых гранул могут совпадать с начальными (упругое котуннелирование), в то время как для других гранул начальное и конечное состояние могут отличаться на электрон-дырочную пару (неупругое котуннелирование). В результате (см. детали в [13]), закон (1.1) воспроизводится с

$$T_0 \sim \mathcal{L}(T)E_C, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}(T) \sim \begin{cases} \ln(E_C/g\delta), & T \ll T_c, \\ \ln(E_C^2/gT^2\mathcal{L}^2), & T \gg T_c, \end{cases} \quad (1.3)$$

где Кулоновская энергия $E_C \sim e^2/2C$, а C это типичная емкость в системе гранул. Типичное расстояние между уровнями в грануле $\delta \sim (\nu_F a^3)^{-1}$, где a это размер гранулы, и $g \ll 1$ есть типичный безразмерный кондактанс между соседними гранулами. Заметим, что логарифмический множитель $\mathcal{L} \gg 1$ велик по сравнению с единицей. Кроссовер между упругим и неупругим режимом котуннелирования происходит при

$$T \sim T_c = \sqrt{E_C \delta} / \mathcal{L}. \quad (1.4)$$

Таким образом, “растянутая” экспонента в случае гранулированного материала немного модифицируется в промежуточном диапазоне температур ($T > T_c$) благодаря дополнительной логарифмической зависимости T_0 от T . Однако, такое отклонение от закона Мотта-Эфроса-Шкловского непросто детектировать экспериментально.

1.2 Жесткая щель и поляронный эффект в системах с однородным беспорядком

Хорошо известно, что при относительно высоких температурах на смену прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка приходит прыжковая проводимость по ближайшим соседям (nearest neighbour hopping, NNH), так что “растянутая” экспонента (1.1) заменяется обычным законом Аррениуса для проводимости $\sigma \propto \exp\{-\varepsilon_3/T\}$ (см. [2]). Что менее тривиально, в некоторых случаях [16] возвращение активационного закона

$$\sigma \sim \exp\{-E_H/T\} \quad (1.5)$$

также наблюдается при *низких* температурах! Это явление обычно связывается с возникновением поляронного эффекта: “жесткая” щель E_H предполагается равной энергии, необходимой для создания поляронного облака вокруг прыгающего электрона.

В принципе, во время прыжка с начального положения в конечное, прыгающий электрон может захватить с собой необходимую энергию, так что при еще меньших температурах активационный механизм поляронных прыжков заменяется туннельным [1], и “растянутая” экспонента (1.1) опять восстанавливается при $T \lesssim \omega$, где ω есть характерная частота фононов (или других объектов – например, магнонов и т.д.), которые образуют поляронное облако. Случай магнитных поляронов особенный: благодаря локальному сохранению намагниченности процесс туннельного переноса поляронного облака сильно подавлен [17], и кроссовер от классического к квантовому случаю сдвигается от $T \sim \omega$ в область еще более низких температур. Это, по-видимому, является причиной того, почему жесткая щель наблюдалась в основном (но не исключительно!) в магнитных системах.

В общих чертах теория VRH с учетом поляронного эффекта была разработана в [17, 18, 19, 20] для различных типов поляронов.

1.3 Поляронный эффект в гранулированных системах

В экспериментах [21] активационный закон Аррениуса для проводимости наблюдался в двумерных массивах Ge/Si квантовых точек при температурах ниже $\sim 5K$, см. график 1.1. При $T > T_c$ проводимость следует закону (1.1) с $\alpha = 0.52 \pm 0.03$ и $\alpha = 0.50 \pm 0.03$ для образцов с $\nu = 2.3$ и $\nu = 2.8$ соответственно, что отвечает закону Эфроса-Шкловского. При $T < T_c$ энергия активации насыщается.

В работе [22] также сообщалось о наличии “почти” активационной зависимости проводимости от температуры в двумерном массиве металлических наночастиц Co в диапазоне температур $20K < T < 30K$. Эта зависимость хорошо описывается формулой (1.1) с показателем $\alpha = 1.1$. При более высоких температурах $45K < T < 80K$ наблюдался закон Эфроса-Шкловского.

Кажется естественным объяснить эти явления также в терминах некоторого вида поляронного эффекта.

Стоит сразу же отметить, однако, что поляронный эффект не обязательно ведет к активационной зависимости проводимости от температуры. Если распределение барьеров имеет степенной хвост в нуле, то следует ожидать зависимости (1.1) с $\alpha \neq 1$. В частности, в [20] было показано, что если функция распределения барьеров постоянна вблизи нуля, то в Моттовском случае в твердых телах $\alpha = 2/(d + 2)$. Есть эксперименты [23], в которых в массивах из нанокристаллов ZnO наблюдалась зависимость (1.1) с $\alpha = 2/3$ в диапазоне температур $7K < T < 200K$. С некой осторожностью можно надеяться объяснить подобные результаты также с помощью поляронного эффекта.

Но в чем заключается поляронный эффект в случае, где мы имеем дело не с индивидуальными носителями заряда, а с гранулами, содержащими много электронов? И какие степени свободы ответственны за образование поляронного облака в этом случае? Насколько нам известно, до сих пор не обсуждались никакие модели поляронного эффекта в гранулированных системах. В этой работе мы попытались разработать такую модель для металлических гранул, помещенных в диэлектрическую матрицу, в которой присутствуют заряженные примеси (stray charges). В рамках этой модели мы исследуем проводимость системы на основе концепции многократного квантования, описанной в [13].

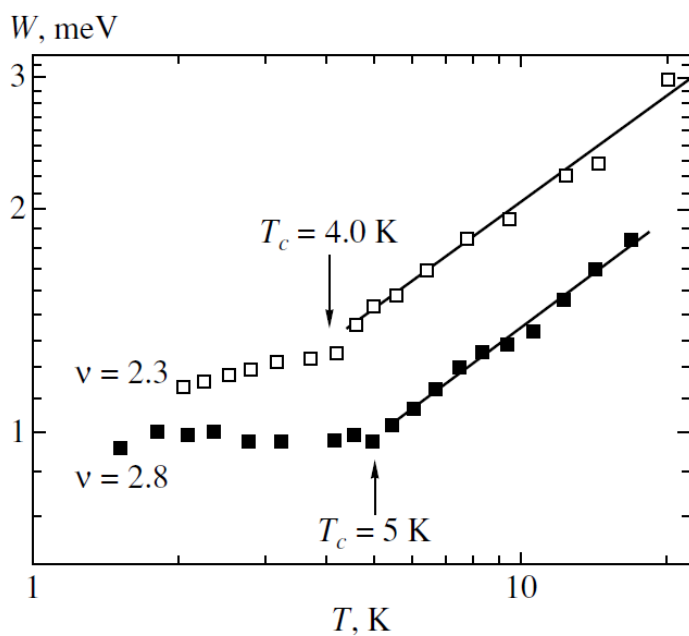


Рис. 1.1: Температурная зависимость энергии активации прыжковой проводимости $W = \partial \ln \sigma / \partial (1/T)$, построенная в log-log координатах для образцов с различными факторами заполнения ν . Сплошные линии описывают приближение экспериментальных зависимостей формулой (1.1): $W = \alpha T^{1-\alpha} T_0^\alpha$. График взят из работы [21].

Глава 2

Модель динамических флуктуаций беспорядка, обусловленных колебаниями заряженных примесей

Главным источником беспорядка в гранулированных системах являются “сторонние заряды” – всегда присутствующие заряженные примеси или дефекты, застрявшие в изолирующей части системы. Они создают случайные Кулоновские потенциалы на гранулах, так что Кулоновская энергия системы равна

$$E_C(\vec{N}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{N} - \vec{Q}) \hat{U} (\vec{N} - \vec{Q}) - \vec{Q} \hat{U} \vec{Q} \right\} \quad (2.1)$$

где мы ввели векторные обозначения $\vec{N} \hat{U} \vec{N} \equiv \sum_{ii'} U_{ii'} N_i N_{i'}$. Здесь целое число N_i обозначает количество избыточных электронов на i -ой грануле, $\hat{U} \equiv e^2 \hat{C}^{-1}$ есть обратная матрица емкостей, а компоненты Q_i вектора \vec{Q} это так называемые заряды-оффсеты (offset charges), они не обязаны быть целыми. Нужно отметить, что каждый заряд-оффсет Q_i не может быть ассоциирован с некоторой отдельной примесью: все примеси, которые эффективно взаимодействуют с гранулой i , вносят свой вклад в Q_i . И наоборот, каждая примесь может внести вклад во многие заряды-оффсеты Q_i .

Обычно заряды-оффсеты считаются статическим беспорядком, но мы как раз собираемся исследовать эффекты, связанные с их динамикой. В самом деле, Q_i зависят от положений заряженных примесей, которые не являются абсолютно жесткими, а могут отклоняться от своих равновесных положений. В гармоническом приближении эти отклонения описываются гамильтонианом $\hat{H}_{\text{dev}} = E_{\text{dev}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{kin}}$,

$$E_{\text{dev}} = \frac{1}{2} (\vec{Q} - \vec{Q}^{(0)}) \hat{K} (\vec{Q} - \vec{Q}^{(0)}) \quad (2.2)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2} \partial_{\vec{Q}} \hat{M}^{-1} \partial_{\vec{Q}} \quad (2.3)$$

где положительно-определенная матрица эффективных масс \hat{M} зависит от масс примесей. Вектор $\vec{Q}^{(0)}$ описывает набор равновесных значений зарядов-оффсетов для случая нейтральных гранул $\vec{N} \equiv 0$. Матрица \hat{K} в (2.2) описывает жесткость системы по отношению к смещениям заряженных примесей. Она содержит как “механическую” часть (связанную с деформацией окружающей среды), так и “электрическую” часть (изменение электростатической энергии системы (2.1) из-за смещения примесей). Эта электрическая часть зависит от \vec{N} : поскольку $K_{ii'}(\vec{N})$ линейно связана со

второй производной энергии по координатам примесей, \hat{K} должна быть полиномом второй степени по \vec{N} :

$$K_{ii'}(\vec{N}) = K_{ii'}^{(0)} + \sum_j K_{ii'j}^{(1)} N_j + \sum_{jj'} K_{ii'jj'}^{(2)} N_j N_{j'}. \quad (2.4)$$

Механическая часть вносит вклад только в первое, N -независимое, слагаемое в (2.4). Таким образом, если механическая жесткость доминирует над электрической, то N -зависимой частью \hat{K} можно пренебречь. В любом случае, даже если электрическая часть \hat{K} существенна, при низких температурах можно игнорировать “живую” часть зависимости \hat{K} от \vec{N} , и заменить функцию $K_{ii'}(\vec{N})$ на ее равновесное значение

$$K_{ii'} \equiv K_{ii'}^{(0)} + \sum_j K_{ii'j}^{(1)} N_j^{(\text{eq})} + \sum_{jj'} K_{ii'jj'}^{(2)} N_j^{(\text{eq})} N_{j'}^{(\text{eq})} \quad (2.5)$$

где $\vec{N}^{(\text{eq})}$ есть равновесные заряды гранул. Давайте найдем их.

2.1 Классическое основное состояние

Поскольку эффективные массы велики, в главном приближении кинетическое слагаемое (2.3) в гамильтониане можно выбросить, и основное состояние системы отвечает минимуму полной потенциальной энергии

$$\begin{aligned} E_{\text{ch}}(\vec{N}, \vec{Q}) &= E_C(\vec{N}, \vec{Q}) + E_{\text{dev}}(\vec{Q}) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\vec{N} - \vec{Q}) \hat{U} (\vec{N} - \vec{Q}) - \vec{Q} \hat{U} \vec{Q} \right\} + \frac{1}{2} (\vec{Q} - \vec{Q}^{(0)}) \hat{K} (\vec{Q} - \vec{Q}^{(0)}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Минимизируя (2.6) по \vec{Q} при фиксированных \vec{N} , мы находим

$$\vec{Q}_{\text{min}}(\vec{N}) = \vec{Q}^{(0)} + \hat{K}^{-1} \hat{U} \vec{N}, \quad (2.7)$$

$$\min_{\vec{Q}} E_{\text{ch}}(\vec{Q}, \vec{N}) = \frac{1}{2} \vec{N} \hat{U} \vec{N} - \vec{N} \hat{U} \vec{Q}^{(0)} \quad (2.8)$$

где симметричная матрица

$$\hat{U} = \hat{U} - \hat{U} \hat{K}^{-1} \hat{U} \quad (2.9)$$

имеет смысл обратной матрицы емкостей, перенормированной с учетом эффектов конечной жесткости системы.

Для стабильности основного состояния матрица \hat{U} должна быть положительно определенной. Нарушение этого требования просто означало бы, что мы неправильно выбрали набор $\vec{N}^{(\text{eq})}$ для основного состояния; система в конце концов придет в другое состояние, где стабильность будет восстановлена благодаря нелинейности, выраженной в зависимости $\hat{K}(\vec{N})$ в (2.4).

Дальнейшая минимизация (2.8) по отношению к \vec{N} дает равновесные значения зарядов как целые числа, ближайшие (в каком смысле, см. ниже) к $\hat{U}^{-1} \hat{U} \vec{Q}^{(0)}$. В результате

$$\vec{N}^{(\text{eq})} = \hat{U}^{-1} \hat{U} \vec{Q}^{(0)} + \vec{\gamma}, \quad (2.10)$$

$$\vec{Q}^{(\text{eq})} = \vec{Q}^{(0)} + \hat{K}^{-1} \hat{U} \vec{N}^{(\text{eq})} \quad (2.11)$$

где $\vec{\gamma}$ есть набор “эффективных зарядов-оффсетов”. Нужно отметить, что в случае жестких примесей (когда $\hat{K} \rightarrow \infty$) имеем $\hat{U} \rightarrow \hat{U}$, и эффективные заряды-оффсеты сводятся к обычным.

Общее требование, обычно налагаемое на эффективные заряды-оффсеты, гласит

$$-1/2 \leq \gamma_k \leq 1/2 \quad (2.12)$$

Оно означает, что N_i должно быть ближайшим целым к $[\hat{U}^{-1}\hat{U}\vec{Q}^{(0)}]_i$. Строго говоря, это не совсем верно в нашем случае: для симметричной матрицы \hat{U} общего вида “целый” минимум функционала энергии \vec{N} может, в принципе, лежать довольно далеко от безусловного минимума (без учета “целости”), так что некоторые компоненты $\vec{\gamma}$ могут быть довольно большими. Легко придумать такие примеры (скажем, сильно анизотропный профиль потенциала), но они все оказываются довольно экзотичными, если не вообще патологическими. Во всяком случае, мы не смогли придумать такую физически оправданную матрицу \hat{U} , чтобы требование (2.12) было нарушено. Главное, что (2.12) верно для двух случаев, которые мы будем изучать детально: экранированное Кулоновское взаимодействие (диагональная матрица \hat{U}) и дальнедействующее Кулоновское взаимодействие (впрочем, для последнего нет стопроцентной уверенности). Таким образом, далее мы будем считать требование (2.12) выполненным.

2.2 Низкоэнергетический гамильтониан и поляронный эффект

При низких температурах заряды гранул \vec{N} и заряды-оффсеты \vec{Q} слабо отклоняются от своих равновесных значений, так что можно записать

$$\vec{N} = \vec{N}^{(eq)} + \vec{n}, \quad \vec{Q} = \vec{Q}^{(eq)} + \vec{q}, \quad (2.13)$$

где n_k может принимать значения $(-1, 0, 1)$. Теперь мы готовы переписать гамильтониан в терминах отклонений \vec{n} и \vec{q} . Подставляя (2.13) в (2.6) и опуская слагаемые, которые не содержат отклонений, мы получаем окончательный вид низкоэнергетического гамильтониана

$$E_{ch} = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} - \vec{q}) \hat{U} (\vec{n} - \vec{q}) + \vec{q} (\hat{K} - \hat{U}) \vec{q} \right\} + \vec{n} \hat{U} \vec{\gamma}. \quad (2.14)$$

Заметим, что в гамильтониане (2.14) присутствует линейная связь между дискретной зарядовой переменной \vec{n} и непрерывной переменной \vec{q} . Это означает наличие поляронного эффекта: изменение заряда гранулы (добавление или удаление с нее одного электрона) приводит к “поляризации окружения”, в нашем случае выражающейся в сдвиге окружающих гранулу заряженных примесей. В результате такого сдвига энергия системы понижается.

Описанное явление во многих отношениях очень похоже на стандартный поляронный эффект, возникающий за счет поляризации окружающей электрон однородной среды. В нашем случае, однако, из-за сильной неоднородности системы, величина понижения энергии (поляронный сдвиг) зависит от того, на какую именно гранулу помещен избыточный заряд.

2.3 Термодинамические энергии возбуждений

Помимо основного состояния, низколежащие возбужденные состояния очень важны для транспортных свойств системы. Для состояния \vec{n} термодинамическая (то есть, минимизированная по \vec{q}) энергия возбуждения

$$\tilde{E}(\vec{n}) \equiv \min_{\vec{q}} E_{\text{ch}}(\vec{n}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \vec{n} \hat{U}(\vec{n} + 2\vec{\gamma}) \quad (2.15)$$

Различные ветви спекта (2.14) можно визуализировать как многомерные параболоиды над \vec{q} -пространством. Параболоиды маркированы вектором \vec{n} . Энергия возбуждения $\tilde{E}(\vec{n})$ есть не что иное, как энергетическое расстояние между дном соответствующего параболоида и уровнем классического основного состояния, см. рис. 2.2.

2.3.1 Одночастичные возбуждения

Ниже мы получим некоторые важные характеристики одночастичных возбужденных состояний, в которых только одна компонента n_k в \vec{n} ненулевая, в то время как все остальные равны нулю (а именно, $\vec{n} = \pm \vec{z}_k$ где $[\vec{z}_k]_m = \delta_{km}$).

Термодинамическая энергия такого возбуждения

$$\tilde{E}_k^{(\pm)} = \frac{1}{2} \vec{z}_k \hat{U}(\vec{z}_k \pm 2\vec{\gamma}), \quad (2.16)$$

отвечает изменению “отрелаксированной” энергии из-за рождения или уничтожения одного электрона на грануле k . По определению основного состояния, неравенство $\tilde{E}_k^{(\pm)} \geq 0$ должно быть выполнено для всех k . В гранулированных системах удобно ввести

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \tilde{E}_k^{(+)}, & \text{for } \vec{z}_k \hat{U} \vec{\gamma} < 0, \\ -\tilde{E}_k^{(-)}, & \text{for } \vec{z}_k \hat{U} \vec{\gamma} > 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

что имеет смысл энергии “заряженного основного состояния”, отсчитанной от глобального основного состояния. Плотность таких состояний иногда называется в литературе плотностью основных состояний (density of ground states, DOGS) – см. [11, 24].

Как мы скоро убедимся, другая полезная комбинация, которая входит в активационную экспоненту кондактанса между двумя удаленными гранулами (одну из них мы условно будем называть “левой” (l), а другую – “правой” (r)), это

$$\varepsilon_{lr} \equiv \frac{1}{2} \{|\varepsilon_l - \varepsilon_r| + |\varepsilon_l| + |\varepsilon_r|\} \quad (2.18)$$

Отметим, что эти величины имеют стандартный аналог в обычной теории прыжковой проводимости [2].

Франк-Кондоновская энергия возбуждения

$$E_k^{(\pm)}(\vec{q}) \equiv E_{\text{ch}}(\pm \vec{z}_k, \vec{q}) - E_{\text{ch}}(0, \vec{q}) = \tilde{E}_k^{(\pm)} + \frac{1}{2} \vec{z}_k \hat{U} \hat{K}^{-1} \hat{U} \vec{z}_k \mp \vec{z}_k \hat{U} \vec{q}, \quad (2.19)$$

отвечает электронным переходам, которые происходят очень быстро, так что медленные переменные \vec{q} не успевают измениться за время процесса (принцип Франка-Кондона).

2.3.2 Двухчастичные возбуждения

Есть четыре класса возможных двухчастичных процессов, отвечающих акту переноса заряда $-e$ с гранулы l на гранулу r , см. рис. 2.1.

- a) ($++$ процесс): Перенос одночастичного возбуждения электронного типа с l на r : $(\vec{n} = \vec{z}_l) \longrightarrow (\vec{n} = \vec{z}_r)$;
- b) ($--$ процесс): Перенос одночастичного возбуждения дырочного типа с r на l : $(\vec{n} = -\vec{z}_r) \longrightarrow (\vec{n} = -\vec{z}_l)$;
- c) ($-+$ процесс): Аннигиляция двухчастичного возбуждения, состоящего из возбуждения электронного типа в грануле l и дырочного типа в грануле r : $(\vec{n} = \vec{z}_l - \vec{z}_r) \longrightarrow (\vec{n} = 0)$;
- d) ($+ -$ процесс): Рождение двухчастичного возбуждения, состоящего из возбуждения электронного типа в грануле r и дырочного типа в грануле l : $(\vec{n} = 0) \longrightarrow (\vec{n} = \vec{z}_r - \vec{z}_l)$;

В то время как в первых двух процессах участвуют только одночастичные возбуждения, в последних двух создаются либо аннигилируют двухчастичные комплексы (“междугранульные” электрон-дырочные пары). Из-за, вообще говоря, дальнего характера взаимодействия \hat{U} компоненты двухчастичного возбуждения взаимодействуют друг с другом, так что их энергии в общем случае не аддитивны. Термодинамические энергии двухчастичных возбуждений могут быть получены из (2.15):

$$\tilde{E}_{lr}^{(\pm\pm)} = \tilde{E}_l^{(\pm)} + \tilde{E}_r^{(\pm)}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{E}_{lr}^{(\pm\mp)} = \tilde{E}_l^{(\pm)} + \tilde{E}_r^{(\mp)} - \vec{z}_l \hat{U} \vec{z}_r, \quad (2.21)$$

и Франк-Кондоновские энергии

$$E_{lr}^{(\pm\pm)}(\vec{q}) \equiv E_{\text{ch}}(\pm\vec{z}_l \pm \vec{z}_r, \vec{q}) - E_{\text{ch}}(0, \vec{q}) = E_l^{(\pm)} + E_r^{(\pm)}, \quad (2.22)$$

$$E_{lr}^{(\pm\mp)}(\vec{q}) \equiv E_{\text{ch}}(\pm\vec{z}_l \mp \vec{z}_r, \vec{q}) - E_{\text{ch}}(0, \vec{q}) = E_l^{(\pm)} + E_r^{(\mp)} - \vec{z}_l \hat{U} \hat{K}^{-1} \hat{U} \vec{z}_r \quad (2.23)$$

Последнее слагаемое (взаимодействующая часть) в (2.21) будет важно в модели с дальнедействующим Кулоном, поэтому удобно ввести для нее специальное обозначение

$$\varepsilon_{lr}^{(\text{int})} = \vec{z}_l \hat{U} \vec{z}_r \quad (2.24)$$

2.3.3 Потенциальный барьер между резонансными состояниями

Очень важную роль в низкотемпературной физике играют резонансные гранулы, для которых либо $\tilde{E}_k^{(+)}$, либо $\tilde{E}_k^{(-)}$ аномально близко к нулю. Хотя энергии состояний $\vec{n}_i = \vec{z}_i$ и $\vec{n}_f = \vec{z}_f$ при этом практически совпадают, переход между ними требует, однако, существенного изменения окружения (то есть, вектора \vec{q}), которое может происходить только непрерывно. В течение этого процесса потенциальная энергия

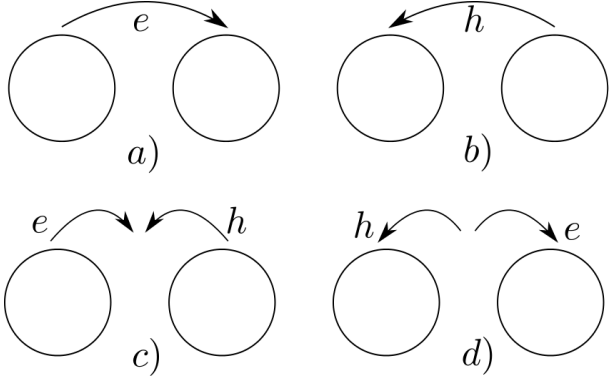


Рис. 2.1: Четыре возможных способа перенести заряд $-e$ с гранулы l на гранулу r .

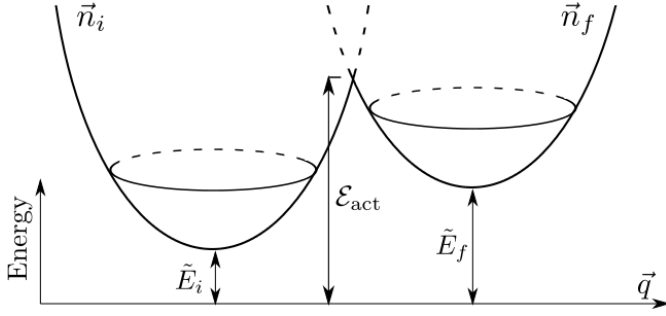


Рис. 2.2: Энергетические параболоиды над \vec{q} -пространством. Параболоиды пронумерованы вектором \vec{n} . Уровень нулевой энергии отвечает классическому основному состоянию.

системы тоже изменяется – сначала увеличивается, затем уменьшается, так что системе приходится преодолевать потенциальный барьер. Преодолеть его можно либо путем активации через барьер, либо путем туннелирования. Для обоих случаев важно знать высоту барьера W . Чтобы найти ее, мы должны минимизировать энергию $E_{\text{ch}}(\vec{n}_i, \vec{q})$ по \vec{q} с дополнительным требованием $E_{\text{ch}}(\vec{n}_i, \vec{q}) = E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q})$. Это можно сделать методом неопределенных множителей Лагранжа. В результате

$$W = \frac{1}{8}(\vec{n}_f - \vec{n}_i)\hat{U}\hat{K}^{-1}\hat{U}(\vec{n}_f - \vec{n}_i) \quad (2.25)$$

Отметим, что W зависит только от разности $\vec{n}_f - \vec{n}_i$ между конечным и начальным состояниями. В частности, оно одинаково для всех типов процессов, описанных в разделе 2.3.2.

Аналогично, мы можем определить энергию активации \mathcal{E}_{act} для перехода между произвольными (не обязательно резонансными) состояниями \vec{n}_i и \vec{n}_f . Она может быть определена как наименьшая точка пересечения двух параболоидов.

$$\mathcal{E}_{\text{act}} = \frac{\tilde{E}_i + \tilde{E}_f}{2} + W + \frac{(\tilde{E}_f - \tilde{E}_i)^2}{16W}, \quad (2.26)$$

где W определено в (2.25). Для краткости мы ввели обозначения $\tilde{E}_i \equiv \tilde{E}(\vec{n}_i)$ и $\tilde{E}_f \equiv \tilde{E}(\vec{n}_f)$

2.4 Модель с короткодействующим взаимодействием

Те гранулированные системы, в которых дальнедействующая часть взаимодействия заэкранирована (скажем, из-за присутствия металлических электродов, либо благодаря остаточной проводимости изолирующей матрицы) могут быть описаны с помощью модели “короткодействующего Кулоновского потенциала” (см., например, [15]).

В этой модели матрицы \hat{U} и \hat{K} считаются диагональными.

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

но их диагональные элементы, вообще говоря, не одинаковы, поскольку разные гранулы имеют разные емкости и т.д. Электростатическая энергия (2.14) может быть записана в простой форме $E_{\text{ch}} = \sum_i E_i(n_i, q_i)$, где

$$E_i(n, q) = E_i^{(e)} \left\{ n^2 + 2n [\gamma_i(1 - \alpha_i) - q] + \frac{q^2}{\alpha_i} \right\}, \quad (2.27)$$

и каждая гранула может быть охарактеризована тремя параметрами:

- Стандартная Кулоновская энергия $E_i^c \equiv U_i/2 = e^2/2C_i$ где C_i есть емкость гранулы i .
- Полярная константа связи $\alpha_i \equiv U_i/K_i$. Неравенство $\alpha_i < 1$ есть условие стабильности.
- Случайный эффективный заряд-оффсет γ_i , распределенный на отрезке $[-1/2, 1/2]$.

Термодинамические и Франк-Кондоновские энергии возбуждений в такой модели есть

$$\tilde{E}_i^{(\pm)} = E_i^{(e)}(1 - \alpha_i)(1 \pm 2\gamma_i), \quad (2.28)$$

$$E_i^{(\pm)}(q) = \tilde{E}_i^{\pm} + W_i \mp 2E_i^{(e)}q_i, \quad (2.29)$$

$$W_i = \alpha_i E_i^{(e)}/4 \quad (2.30)$$

Поскольку $\varepsilon_{lr}^{(\text{int})} \equiv 0$ для короткодействующего потенциала, энергии двухчастичных возбуждений всех типов аддитивны и барьер есть

$$W = W_l + W_r, \quad (2.31)$$

Глава 3

Частота переходов

Как мы знаем из [13], главные черты прыжковой проводимости в гранулированных системах могут быть выявлены уже в простейшей модели короткодействующего Кулоновского потенциала, описанного в разделе 2.4, так что мы начнем наше рассмотрение с этого случая. Случай дальнодействующего взаимодействия мы обсудим в разделе 5.

3.1 Принцип Франка-Кондона и условие его применимости

В этой работе мы будем пренебрегать квантовыми аспектами динамики зарядов-оффсетов (то есть, положим $M \rightarrow \infty$). Последнее предположение, в частности, означает возможность воспользоваться принципом Франка-Кондона при вычислении частот переходов. Согласно этому принципу, набор переменных \vec{q} не меняется на масштабе времени котуннелирования, так что нам следует сосчитать частоты переходов $w_{ii'}(\vec{q})$ между нужными гранулами при фиксированном \vec{q} , и только после этого выполнить температурное усреднение результата по \vec{q} . Время котуннелирования τ_{cotun} можно грубо оценить, как обратный масштаб энергетических знаменателей в теории возмущений

$$\tau_{\text{cotun}} \sim E_c^{-1} \quad (3.1)$$

С другой стороны, характерное время τ_q изменения величин \vec{q} есть не что иное, как обратная частота ω_{imp} колебаний примеси, которая, по-видимому, должна иметь порядок фоновых частот ω_{ph} в системе. В результате, условие справедливости Франк-Кондоновского приближения $\tau_{\text{cotun}} \ll \tau_q$ приобретает вид

$$\omega_{\text{imp}} \ll E_c. \quad (3.2)$$

Заметим, что в типичных гранулированных системах грубая оценка дает величину ~ 100 К как для E_c , так и для ω_{imp} . Поэтому условие (3.2), вообще говоря, нельзя считать автоматически выполненным, вполне возможна и обратная ситуация. Мы однако, ограничимся в этой работе только случаем (3.2). Более того, мы будем считать, что

$$\omega_{\text{imp}} \ll T \ll E_c \quad (3.3)$$

– это позволит нам пренебрегать вероятностью туннельных переходов примесных переменных \vec{q} по сравнению с активационными.

3.2 Гамильтониан и качественные соображения

При выполнении вышеуказанных предположений гамильтониан системы может быть записан в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_i \left\{ E_i(n_i, q_i) + \hat{\mathcal{H}}_i^{(0)} \right\} + \sum_{\langle ii' \rangle} \hat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}^{(ii')}, \quad (3.4)$$

где $E_i(n_i, q_i)$ дается выражением (2.27), и

$$\hat{\mathcal{H}}_i^{(0)} = \sum_{\lambda_i, \sigma} \epsilon_{\lambda_i} a_{\lambda_i \sigma}^+ a_{\lambda_i \sigma}, \quad (3.5)$$

есть гамильтониан электронов в i -ой грануле. Индекс λ_i обозначает электронные собственные состояния с энергиями ϵ_{λ_i} , которые предполагаются σ -независимыми (σ здесь есть проекция электронного спина). Расстояние между электронными уровнями δ_i вблизи уровня Ферми в грануле i предполагается малым: $\delta_i \ll E_i^c$.

Туннельный гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}^{(ii')} = \sum_{\lambda_i, \lambda_{i'}, \sigma} t_{\lambda_i \lambda_{i'}} a_{\lambda_i \sigma}^+ a_{\lambda_{i'} \sigma} \quad (3.6)$$

описывает прыжки электронов между соседними гранулами $\langle ii' \rangle$. Нас интересует случай, когда типичный безразмерный кондактанс между гранулами

$$g_{ii'} \equiv |t_{ii'}|^2 / \delta_i \delta_{i'} \ll 1 \quad (3.7)$$

мал, и туннельный гамильтониан можно учитывать как возмущение; необходимый порядок теории возмущений, однако, оказывается очень высоким (чем ниже температура, тем выше порядок!).

Ключевая идея любого вычисления, связанного с VRH, заключается в известном наблюдении Мотта [3]: при низких температурах прыгающие электроны предпочитают посещать только резонансные узлы (в нашем случае – гранулы), где их энергии попадают в узкую полосу ширины Δ вокруг энергии Ферми. Уменьшение Δ ослабляет множитель $\exp\{-\Delta/T\}$, подавляющий проводимость из-за малого числа доступных возбуждений. С другой стороны, резонансные узлы встречаются редко (типичное расстояние $r(\Delta)$ между ними растет с уменьшением Δ), так что перекрытие соответствующих волновых функций локализованных состояний I мало: $I \propto \exp\{-2r(\Delta)/\xi\}$, и этот малый множитель становится все меньше с уменьшением Δ . Таким образом, нужно найти компромисс между двумя экспоненциально малыми множителями, что приводит к некоторому оптимальному $\Delta_{\text{opt}}(T)$ и проводимости $\sigma \propto \exp\{-\Delta_{\text{opt}}(T)/T\}$. В присутствии поляронного эффекта этот сценарий вычисления немного модифицируется, но ключевая идея остается той же.

В то время как в случае одноэлектронного туннелирования экспоненциальный фактор перекрытия I тривиален и ξ просто связано с длиной убывания волновой функции, в случае металлических гранул происхождение экспоненциальной зависимости и явная форма ξ совсем не являются тривиальными. В этом разделе мы изучим эту проблему, следуя пути, изложенному в [13]. Мы дополнительно учтем физику, возникающую из-за динамики заряженных примесей.

3.2.1 Амплитуда многократного котуннелирования: теория возмущений

Итак, мы интересуемся амплитудой электронного перехода между двумя удаленными резонансными гранулами l (левая) и r (правая). Если бы в гамильтониане не было туннельного слагаемого, то числа заполнения гранул \vec{n} сохранялись бы. Туннельный член $\hat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}$ позволяет электронам прыгать по соседним гранулам; чтобы совершить прыжок между удаленными гранулами, $\hat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}$ нужно применить в некотором $(\mathcal{N} + 1)$ -ом порядке теории возмущений, где \mathcal{N} есть количество промежуточных гранул, составляющих непрерывную цепочку между l и r . Многочастичный процесс, описываемый этим пертурбативным подходом, хорошо известен под названием “котуннелирование”. Он был впервые предложен в [14] и применен к теории транспорта в квантовых точках (см. обзоры [15, 25]) и гранулированных металлах [13, 26].

Рассмотрим перенос электрона через виртуальные состояния на \mathcal{N} промежуточных гранулах. Пусть $l \equiv 0, 1, \dots, \mathcal{N}, \mathcal{N} + 1 \equiv r$ есть последовательность соседних гранул в цепочке с начальной гранулой l и конечной гранулой r , так что соседями гранулы k являются гранулы $k - 1$ и $k + 1$ (см. рис. 3.1). В принципе, нужно суммировать по всем возможным путям, соединяющим l и r , но в случае малых туннельных элементов t мы можем считать, что в сумме преобладают самые короткие пути, которые содержат минимальное возможное количество \mathcal{N} промежуточных гранул. Более того, в большинстве случаев только один определенный путь будет самым важным. Амплитуда такого многократного туннелирования дается соответствующим матричным элементом оператора

$$A_{\{h_k, e_k\}}(\vec{q}) = (-i)^{\mathcal{N}+1} \int \text{T} \left\{ \hat{S} \hat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}(t_{\mathcal{N}+1}) \dots \hat{\mathcal{H}}_{\text{tun}}(t_1) \right\} \prod_{k=0}^{\mathcal{N}+1} dt_k, \quad (3.8)$$

вычисленным (в рамках Франк-Кондоновского приближения) при заданном наборе отклонений \vec{q} .

Амплитуда $A_{\{h_k, e_k\}}$ описывает процесс, по окончании которого дырка с набором квантовых чисел h_0 возникает в грануле l и электрон с набором $e_{\mathcal{N}+1}$ возникает в грануле r ; вообще говоря, каждая из \mathcal{N} промежуточных гранул $k = 1, \dots, \mathcal{N}$ приобретает электрон-дырочную пару с квантовыми числами $\{e_k, h_k\}$ (неупругое котуннелирование). Однако, для некоторых гранул k возможно иметь $e_k = h_k$, тогда никакие электрон-дырочные пары не возникают в этих гранулах (упругое котуннелирование). Мы обозначим набор таких гранул $m_1, m_2, \dots, m_{\mathcal{M}}$. Если это множество пусто ($\mathcal{M} = 0$), то мы имеем дело с чисто неупругим многократным котуннелированием; если оно включает все промежуточные гранулы ($\mathcal{M} = \mathcal{N}$), то мы имеем дело с чисто упругим многократным котуннелированием.

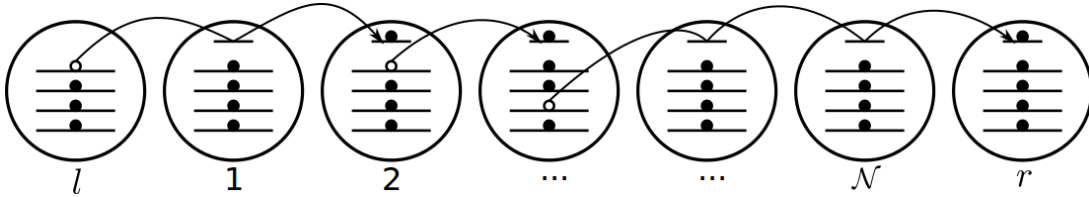


Рис. 3.1: Многократное котуннелирование с гранулы l на гранулу r .

Рассмотрим набор индексов $\{\alpha_1 \beta_1; \dots; \alpha_{\mathcal{N}+1} \beta_{\mathcal{N}+1}\}$, который описывает определенную последовательность отдельных туннелирований между парами соседних гранул

в цепочке (в k -ой позиции туннелирование происходит с состояния α_k в состояние β_k). Такой набор есть некоторая перестановка “естественной” последовательности $\{h_0e_1; h_1e_2; \dots; h_{\mathcal{N}}e_{\mathcal{N}+1}\}$, отвечающей последовательному движению электрона от левого конца цепочки к правому. Все такие перестановки вносят вклад в амплитуду $A_{\{h_k, e_k\}}$ наравне с “естественной”. Из (3.8) мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\{h_k, e_k\}} &= (-i)^{\mathcal{N}+1} \prod_{k=1}^{\mathcal{N}+1} t_{e_k h_{k-1}} \times \\ &\times \int \prod_{k=0}^{\mathcal{N}+1} d\tau_k \left\langle \left| \text{T} \left\{ \psi_{e_{\mathcal{N}+1}}^+(\tau_{\mathcal{N}} + \dots + \tau_1) \psi_{h_{\mathcal{N}}}(\tau_{\mathcal{N}} + \dots + \tau_1) \dots \psi_{e_1}^+(0) \psi_{h_0}(0) \right\} \right| \right\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

где мы использовали сокращенное обозначение $|\rangle$ для начального и $\langle|$ для конечного состояний. Туннельный матричный элемент $t_{e_k h_{k-1}}$ описывает переход электрона из состояния h в $k-1$ -ой грануле в состояние e в k -ой грануле.

В рамках модели с короткодействующим взаимодействием нам нужно Т-упорядочить ψ -операторы, действующие в пространстве каждой гранулы отдельно:

$$-i \left\langle \left| \text{T} \left\{ \psi_{h_k}(\tau_1 + \dots + \tau_k) \psi_{e_k}^+(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1}) \right\} \right| \right\rangle \quad (3.10)$$

В результате, мы получаем для неупругих гранул

$$\begin{aligned} &-in_{h_k} [1 - n_{e_k}] \left(\theta(\tau_k) e^{-i(\epsilon_{h_k} + E_k^{(+)})\tau_k - i(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1})(\epsilon_{h_k} - \epsilon_{e_k})} - \right. \\ &\quad \left. - \theta(-\tau_k) e^{-i(\epsilon_{h_k} - E_k^{(-)})\tau_k - i(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1})(\epsilon_{h_k} - \epsilon_{e_k})} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

и для упругих:

$$-i(1 - n_{e_m})\theta(\tau_m) e^{-i(\epsilon_{e_m} + E_m^{(+)})\tau_m} + in_{e_m}\theta(-\tau_m) e^{-i(\epsilon_{e_m} - E_m^{(-)})\tau_m} \quad (3.12)$$

Здесь n_s – фермионные числа заполнения для состояний s (не путать с зарядами гранул!). Два слагаемых в (3.11), (3.12) отвечают разным последовательностям туннелирований: в одном случае сначала создается дырка и затем электрон, а в другом случае порядок обратный. Теперь нужно собрать все множители, содержащие τ_k для каждого $k \in 1 \dots \mathcal{N}$ в (3.9) и интегрировать их. После этого мы получим

$$\tilde{A}_{\{h_k, e_k\}} = -in_{h_0} [1 - n_{e_{\mathcal{N}+1}}] \prod_{k=1}^{\mathcal{N}+1} t_{e_k h_{k-1}} \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} B_k \quad (3.13)$$

Множители B_k для неупругих и упругих гранул соответственно приведены ниже:

$$\begin{aligned} B_k(\vec{q}) &= -n_{h_k} [1 - n_{e_k}] \left\{ \frac{1}{\epsilon_{h_k} + \Delta_k + E_k^{(+)}(q_k)} + \frac{1}{\epsilon_{h_k} + \Delta_k - E_k^{(-)}(q_k)} \right\}, \\ B_m(\vec{q}) &= - \left\{ \frac{1 - n_{e_m}}{\epsilon_{e_m} + \Delta_m + E_m^{(+)}(q_m)} + \frac{n_{e_m}}{\epsilon_{e_m} + \Delta_m - E_m^{(-)}(q_m)} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

где мы для удобства записи ввели обозначение

$$\Delta_k \equiv -\epsilon_{e_{N+1}} - E_f^{(+)}(q_f) + \sum_{l=k+1}^{\mathcal{N}} (\epsilon_{h_l} - \epsilon_{e_l}). \quad (3.15)$$

Нужно подчеркнуть, что явное суммирование по всем последовательностям туннелирований, которое мы только что выполнили, возможно только в модели с короткодействующим взаимодействием, и невозможно при наличии дальнего действия.

Согласно золотому правилу Ферми частота переходов есть

$$w_{lr}(\vec{q}) = 2\pi \sum_{\{h_k, e_k\}} |\tilde{A}_{\{h_k, e_k\}}|^2 \delta(\epsilon_{h_0} - \epsilon_{e_{N+1}} + \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} (\epsilon_{h_l} - \epsilon_{e_l}) - \Delta), \quad (3.16)$$

где мы ввели Франк-Кондоновскую разность электростатических энергий конечного и начального состояний

$$\Delta = \Delta(\vec{q}) = E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q}) - E_{\text{ch}}(\vec{n}_i, \vec{q}) \quad (3.17)$$

В дальнейшем нам понадобится также и разность термодинамических энергий

$$\tilde{\Delta} = \tilde{E}_f - \tilde{E}_i \quad (3.18)$$

которая является энергетическим расстоянием между локальными минимумами, отвечающими состояниям \vec{n}_i и \vec{n}_f .

Важно понимать, что конечные состояния системы с одинаковыми наборами неупругих квантовых чисел (и, возможно, различными наборами упругих квантовых чисел) нельзя отличить друг от друга. По этой причине, строго говоря, мы должны суммировать амплитуды этих процессов, а не вероятности. Однако, из-за быстрых флуктуаций фазы комплексных туннельных матричных элементов, слагаемыми, описывающими интерференцию между амплитудами, отвечающими разным наборам квантовых чисел, можно пренебречь, что и сделано в (3.16).

3.3 Усреднение частоты переходов

Частота переходов (3.16) зависит как от динамических случайных переменных \vec{q} , так и от статических $\vec{\gamma}, \vec{\alpha}$ и т.д. Существует важное отличие между этими группами переменных: нужно произвести термодинамическое усреднение (3.16) по \vec{q} , а статические переменные не подразумевают усреднения, так что, в принципе, они остаются “живыми” и характеризуют определенную цепочку. Однако, из-за того что типичное количество \mathcal{N} промежуточных гранул в цепочке большое, статический беспорядок частично само-усредняется. Как мы увидим позже, только зависимость от нескольких статических случайных переменных остается “живой” (а именно тех, что описывают крайние гранулы l и r).

3.3.1 Термодинамическое усреднение

Термодинамическое усреднение по \vec{q} имеет вид

$$\langle (\dots) \rangle_{\vec{q}} = \frac{1}{Z_c} \sum_{\vec{n}} \int (\dots) \exp \left\{ -\frac{E_{\text{ch}}(\vec{n}, \vec{q})}{T} \right\} d\vec{q} \quad (3.19)$$

где Z_c есть статсумма

$$Z_c = \left[\det \frac{\hat{K}}{2\pi T} \right]^{-1/2} \sum_{\vec{n}} \exp \left\{ -\tilde{E}(\vec{n})/T \right\} \quad (3.20)$$

При усреднении по электронным состояниям мы будем предполагать, что соответствующее распределение – равновесное и некоррелированное, так что $\langle n_{s_k} \rangle = f_F(\epsilon_{s_k})$ и $\langle n_{s_k} n_{s_l} \rangle = \langle n_{s_k} \rangle \langle n_{s_l} \rangle$, где f_F – фермиевская функция.

Выражение для частоты переходов можно существенно упростить, если заметить, что характерный масштаб неупругих энергий ϵ_{h_l} , ϵ_{e_l} контролируется комбинацией функций Ферми и δ -функции в (3.16). Видно, что $\epsilon_{\text{inel}} \sim \Delta/L$, где $L = \mathcal{N} - \mathcal{M}$ есть число неупругих гранул в цепочке. Это значит, что типичное $\epsilon_{\text{inel}} \ll E_c$. Таким образом, этими величинами в знаменателях в (3.14) можно пренебречь в сравнении с $E_k^{(\pm)}$. Однако, это не верно для упругих энергий ϵ_m , поскольку они не входят в δ -функцию. Эти энергии порядка E_c и должны быть сохранены в знаменателях. По этой же причине (поскольку $\epsilon_{h_m} \sim E_c \gg T$) можно заменить $f_F(\epsilon_{h_m})$ на $1 - \theta(\epsilon_{h_m})$.

Мы можем заменить $t_{e_k h_{k-1}}$ на его среднее значение на уровне Ферми $t_{k,k-1}$ (то есть, усредненное по интервалу энергий, большому по сравнению с расстоянием между уровнями δ , но малому по сравнению с любым другим актуальным масштабом). Это позволяет нам заменить суммирование по электронным состояниям на интегрирование $\sum_{\epsilon_s} \rightarrow \int d\epsilon_s / \delta_k$, и выполнить интегрирование по упругим энергиям:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{if} = & 2\pi \left\langle \prod_{k=1}^{N+1} |t_{k,k-1}|^2 \sum_{\{h_l, e_l\}} f_F(\epsilon_{h_0}) [1 - f_F(\epsilon_{e_{N+1}})] \prod_{k, \text{inelastic}} f_F(\epsilon_{h_k}) [1 - f_F(\epsilon_{e_k})] \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{E_k^{(+)} } - \frac{1}{E_k^{(-)} } \right]^2 \prod_{m, \text{elastic}} \left[\frac{1}{E_m^{(+)} } + \frac{1}{E_m^{(-)} } \right] \delta \left(\epsilon_{h_0} - \epsilon_{e_{N+1}} + \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} (\epsilon_{h_l} - \epsilon_{e_l}) - \Delta \right) \right\rangle_{\vec{q}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Величины q_k для промежуточных гранул входят в \bar{w}_{if} только через знаменатели в квадратных скобках обоих типов (упругих и неупругих), причем результат интегрирования по dq_k в термодинамическом усреднении формально расходится в резонансах, где либо $E_k^{(-)}$, либо $E_k^{(+)}$ обращается в нуль. Эта расходимость, однако, должна быть обрезана на $E_k^{\pm} \sim |t|$, где теория возмущений перестает работать, так что интегрирование вблизи резонансов дает конечный результат. Таким образом, каждое интегрирование по dq_k дает три вклада: один вблизи равновесия $q_k \approx 0$, и два других вблизи резонансов $q_k^{(\pm)}$, определяемых условием $E_k^{(\pm)}(q_k^{(\pm)}) \approx 0$. Относительные величины этих резонансных вкладов экспоненциально подавлены $\sim E_c/|t| \exp\{-E_c/T\}$ и поэтому ими можно пренебречь в низкотемпературном режиме VRH.

Подводя итог, мы заключаем, что термодинамические флуктуации q на промежуточных гранулах не важны, и ими можно просто пренебречь, положив $q_k \approx 0$, так что $E_k^{(\pm)}(q_k) \rightarrow E_k^{(\pm)}(0)$ в (3.21).

3.3.2 Самоусреднение для промежуточных гранул

При работе с произведениями большого числа случайных величин, возникающими в (3.21), можно пользоваться правилом самоусреднения, следующим из центральной

предельной теоремы:

$$\prod_{i=1}^n X_i \approx \exp \{n \overline{\ln X}\}, \quad n \gg 1 \quad (3.22)$$

для любых статистически независимых одинаково распределенных величин X_i , и поэтому

$$\begin{aligned} |t_{kk-1}|^2 &\rightarrow t^2 \equiv e^{\overline{\ln |t_{kk-1}|^2}} \\ \delta_k \rightarrow \delta &\equiv e^{\overline{\ln \delta_k}}, \quad E_i^{(c)} \rightarrow E_c \equiv e^{\overline{\ln E_k^{(c)}}} \\ \left(\frac{1}{E_m^{(+)}(0)} + \frac{1}{E_m^{(-)}(0)} \right) &\rightarrow \frac{A_1}{E_c} \\ \left(\frac{1}{E_k^{(+)}(0)} - \frac{1}{E_k^{(-)}(0)} \right)^2 &\rightarrow \frac{A_2}{E_c^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv 2 \exp\{-\overline{\ln[1 - 4(1 - \alpha)^2 \gamma^2]}\}, \\ A_2 &\equiv 4A_1^2 \exp\{\overline{\ln[(1 - \alpha)\gamma]}\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Множители A_1 , A_2 зависят от конкретной функции распределения случайных параметров α и γ и их корреляции. Например, в отсутствие поляронного эффекта ($\alpha \equiv 0$) для равномерного распределения γ в интервале $[-1/2, 1/2]$ имеем $A_1 = A_2 = e^2 \approx 7.4$

3.3.3 Термодинамическое усреднение – продолжение

Наконец, нам нужно выполнить оставшиеся усреднения по энергиям $\epsilon_{e_l}, \epsilon_{h_l}$ компонент электрон-дырочных пар, созданных в неупругих гранулах, и по вектору \vec{q} .

Мы определим новый энергетический масштаб

$$T_* = \sqrt{(A_1/A_2)E_c\delta} \quad (3.25)$$

и более удобные для дальнейшего обозначения $\epsilon_l = \epsilon_{e_l}$, $\epsilon_{\mathcal{N}+l} = -\epsilon_{h_l}$ для всех "неупругих" промежуточных гранул, и $\epsilon_{2\mathcal{N}+1} = \epsilon_{e_{\mathcal{N}+1}}$, $\epsilon_{2\mathcal{N}+2} = -\epsilon_{h_0}$ для крайних гранул. Тогда мы можем переписать (3.21) в виде

$$\bar{w}_{if} = 2\pi g T_* \left(\frac{A_1 g \delta}{E_c} \right)^{\mathcal{N}} \sum_{L=0}^{\mathcal{N}} C_{\mathcal{N}}^L \langle I_L[\Delta(q_i, q_f)] \rangle_{\vec{q}}, \quad (3.26)$$

где

$$I_L(\Delta) = T_* \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=0}^{2L+2} \frac{d\epsilon_l}{T_*} [1 - f_F(\epsilon_l)] \delta \left(\sum_{l=0}^{2L+2} \epsilon_l + \Delta \right) \quad (3.27)$$

Биномиальный коэффициент $C_{\mathcal{N}}^L \equiv \mathcal{N}! / [(L!) (\mathcal{N} - L)!]$ возникает в формуле (3.26) как количество возможных разбиений цепочки на множества упругих и неупругих

гранул. Отметим, что в (3.27) мы использовали соотношение (3.7) и выразили результат в терминах среднего безразмерного кондактанса между соседними гранулами $g \equiv (|t|/\delta)^2 \ll 1$.

Как было показано в [13], в отсутствии поляронного эффекта (для $W \rightarrow 0$) характерный масштаб ϵ_{inel} энергий электрон-дырочных пар, созданных при неупругом куннелировании, много больше температуры. Это позволяет вычислить многократный интеграл в (3.27) и приводит к результату:

$$I_L(\Delta) = \frac{(|\Delta|/T_*)^{2L+1}}{(2L+1)!} \exp\left\{-\frac{\Delta + |\Delta|}{2T}\right\}, \quad \frac{\Delta}{L} \gg T. \quad (3.28)$$

Физический смысл этого результата ясен: если количество неупругих гранул есть L и их полная энергия есть Δ , тогда характерная энергия одного электрона (или одной дырки), созданных в этом процессе, равна $\epsilon_{\text{inel}} \sim \Delta/L$. Фазовый объем, отвечающий процессу с $2L+2$ частицами с энергиями $\epsilon \sim \epsilon_{\text{inel}}$ и конечной плотностью состояний, будет пропорционален $\epsilon_{\text{inel}}^{2L+2}$, что (с помощью формулы Стирлинга), объясняет зависимость (3.28).

Мы скоро увидим, что в присутствии сильного поляронного эффекта ϵ_{inel} становятся сравнимыми с температурой. Получить $I_L(\Delta)$ в случае $\epsilon_{\text{inel}} \sim T$ оказывается намного сложнее, но это можно сделать, используя трюк, предложенный в [27].

Нужно сделать Фурье-преобразование δ -функции в (3.27), чтобы расцепить интегралы по ϵ_l :

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-i\Delta t} dt \prod_{l=0}^{2L+2} \int \frac{e^{-it\epsilon_l}}{1 + e^{-\epsilon_l/T}} d\epsilon_l \quad (3.29)$$

Трюк состоит в умножении этого выражения на $1 = \exp(-\frac{\Delta}{2T} - \frac{1}{2T} \sum \epsilon_l)$, что делает интегралы сходящимися, и дальше они могут быть легко посчитаны с помощью теории вычетов:

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\Delta/2T} \int e^{-i\Delta t} dt \prod_{l=0}^{2L+2} \int \frac{e^{-it\epsilon_l}}{2 \cosh \frac{\epsilon_l}{2T}} d\epsilon_l = \frac{1}{2\pi} e^{-\Delta/2T} \int e^{-i\Delta t} dt \left[\frac{\pi T}{\cosh \pi t T} \right]^{2L+2} \quad (3.30)$$

В результате,

$$I_L(\Delta) = \frac{T_*}{2\pi} e^{-\Delta/2T} \int e^{-i\Delta t} dt \left(\frac{\pi T/T_*}{\cosh \pi t T} \right)^{2L+2} \quad (3.31)$$

Интеграл (3.31) можно вычислить точно, но удобнее сначала провести суммирование по L , которое в данной ситуации тривиально:

$$\sum_{L=0}^{\mathcal{N}} C_{\mathcal{N}}^L I_L(\Delta) = \frac{T_*}{2\pi} e^{-\Delta/2T} \int e^{-i\Delta t} dt \left[1 + \left(\frac{\pi T/T_*}{\cosh \pi t T} \right)^2 \right]^{\mathcal{N}} \left(\frac{\pi T/T_*}{\cosh \pi t T} \right)^2 \quad (3.32)$$

Теперь нам осталось только провести Гиббсовское усреднение множителя $\langle \exp\{-\Delta(1/2T + it)\} \rangle_{\bar{q}}$, которое сводится просто к Гауссову интегрированию. В итоге

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{g}{T} \left(\frac{A_1 g \delta}{E_c} \right)^{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\frac{W}{T} - \frac{\tilde{E}_i^+ + \tilde{E}_f^+}{2T} \right\} \\ &\times \int \exp \left\{ -\frac{4W}{T} u^2 + i \frac{|\tilde{\Delta}|}{T} u \right\} \left(1 + \left[\frac{\pi T/T_*}{\cosh \pi u} \right]^2 \right)^{\mathcal{N}} \left[\frac{\pi T}{\cosh \pi u} \right]^2 du \end{aligned} \quad (3.33)$$

где мы ввели безразмерную переменную $u = tT$.

Напомним, что в случае короткодействующего взаимодействия мы имеем

$$\tilde{E}_i + \tilde{E}_f = |\varepsilon_l| + |\varepsilon_r| \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta} = \varepsilon_l - \varepsilon_r \quad (3.34)$$

Комбинация $|\tilde{\Delta}| - 4W$ будет часто встречаться в дальнейшем, поэтому удобно ввести величину

$$D \equiv |\tilde{\Delta}| - 4W, \quad (3.35)$$

Тогда, если опустить все предэкспоненциальные множители в (3.33), то окончательно в Моттовском случае частота переходов принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{w} \propto & \left(\frac{A_1 g \delta}{E_c} \right)^{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_{lr}}{T} - \frac{D^2}{16WT} \right\} \\ & \times \int \exp \left\{ -\frac{W}{T} \left(2u - i - i \frac{D}{4W} \right)^2 \right\} \left[1 + \left(\frac{\pi T / T_*}{\cosh \pi u} \right)^2 \right]^{\mathcal{N}} \frac{du}{\cosh^2 \pi u} \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.4 Частота переходов при разной силе поляронного эффекта

Чтобы приближенно посчитать интеграл по u , можно использовать метод перевала. Седловая точка находится ниже самого низкого полюса в верхней полуплоскости комплексного u на мнимой оси $u = i(1 - \xi)/2$, где ξ удовлетворяет уравнению

$$D + 4W\xi = 2\pi\mathcal{N}T y(\xi) \cot(\pi\xi/2) \quad (3.37)$$

$$y(\xi) \equiv \left[1 + \left(\frac{T_* \sin(\pi\xi/2)}{\pi T} \right)^2 \right]^{-1} = \frac{\bar{L}}{\mathcal{N}} \quad (3.38)$$

причем величина y определяет типичное количество \bar{L} неупругих гранул в цепочке. В терминах ξ частота переходов может быть записана в виде

$$\bar{w} \propto \left(\frac{A_1 g \delta}{E_c} \right)^{\mathcal{N}} \left[1 + \left(\frac{\pi T}{T_* \sin(\pi\xi/2)} \right)^2 \right]^{\mathcal{N}} \exp \left\{ \frac{W}{T} \xi^2 - \frac{\varepsilon_{lr}}{T} + \frac{D}{2T} \xi \right\} \quad (3.39)$$

В (3.39) мы опустили предэкспоненциальный множитель $\sin^{-2} \pi\xi/2$, поскольку он оказывается важным только при экстремально низких температурах в случае полностью упругого котуннелирования через всю цепочку. Этот множитель также может быть важен для систем, где длина цепочек \mathcal{N} ограничена сверху (например, в небольших массивах квантовых точек, или одноэлектронных транзисторах), но мы исследуем прыжковую проводимость в больших образцах, где граничные эффекты не важны.

Сейчас мы покажем, что весь диапазон параметра D ($-4W < D < \infty$) можно разбить на три интервала, отвечающие различным типам физического поведения системы:

1. Область слабого поляронного эффекта ($D > 0$, $D \gg \delta D$)

2. Область сильного поляронного эффекта ($D < 0$, $|D| \gg \delta D$)
3. Узкая переходная область ($|D| \lesssim \delta D$)

Как мы увидим, ширина переходной области мала:

$$\delta D = 8\sqrt{W\bar{L}T} \lesssim 8\sqrt{WN\bar{T}} \ll 4W \quad (3.40)$$

Последнее неравенство выполнено потому что, как мы позже убедимся, $\max\{W, |\tilde{\Delta}|\}/T \gg \mathcal{N}$ для типичных цепочек гранул, которые вносят вклад в проводимость. Ниже мы обсудим отдельно эти три области.

3.4.1 Слабый поляронный эффект: электронные прыжки

Как мы увидим в конце этого раздела, для $D > 0$ параметр $\xi \ll 1$, так что все тригонометрические функции в (3.37) и (3.38) можно разложить. Кроме того, в области $D \gg \Delta D$ можно пренебречь вторым слагаемым в левой части уравнения (3.37), так что оно превращается в кубическое уравнение

$$(T_*/2T)^2 \xi^3 + \xi = \frac{4\mathcal{N}T}{D} \quad (3.41)$$

Можно легко выразить ξ через y :

$$\xi = \frac{2T}{T_*} \sqrt{(1-y)/y} \quad (3.42)$$

Тогда частота переходов может быть записана в виде

$$\bar{w} \propto \left(\frac{A_1 g \delta}{E_c (1-y)} \right)^{\mathcal{N}} e^{\frac{D}{2T} \xi(y)} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_{if}}{T} \right\} \quad (3.43)$$

Подставляя (3.42) в (3.41), мы получаем уравнение

$$y^3 = (1-y)z^2, \quad \text{где } z = \frac{D}{2T_*\mathcal{N}} \quad (3.44)$$

которое неявно определяет функцию $y(z)$. Наконец, для частоты переходов мы получаем

$$\bar{w}_{lr} \sim \left[\frac{A_1 g \delta}{E_c} \Theta_1 \left(\frac{D}{2T_*\mathcal{N}} \right) \right]^{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_{lr}}{T} \right\}, \quad (3.45)$$

где функция $\Theta_1(z)$ определена согласно

$$\Theta_1(z) = \exp\{2y(z) - \ln(1-y(z))\}, \quad (3.46)$$

Асимптотики функции $\Theta_1(z)$

$$\Theta_1(z) \approx \begin{cases} 1 + 3z^{2/3}, & \text{для } z \ll 1, \\ (ze)^2, & \text{для } z \gg 1 \end{cases} \quad (3.47)$$

Нужно заметить, что $\Theta_1(z)$ совпадает с $e^{\varphi(z)}$, где функция $\varphi(z)$ описана в [13], так что для $D > 0$ результат [13] совпадает с нашим текущим результатом с точностью до небольшой модификации $|\tilde{\Delta}| \rightarrow D = |\tilde{\Delta}| - 4W$ в определении аргумента z . Эта модификация учитывает (слабый) поляронный эффект.

Теперь, пользуясь (3.42) и (3.44), можно легко убедиться, что параметр ξ действительно мал при условиях $D > 0$, $\max\{W, |\tilde{\Delta}|\} \gg \bar{L}T$, при этом соотношение между T и T_* значения не имеет.

3.4.2 Сильный поляронный эффект: поляронные прыжки

Для отрицательного и не слишком малого D правой частью (3.37) можно пренебречь (фактически, если $|D| \gg \delta D$, то это заведомо можно делать), и тогда

$$\xi = |D|/4W \quad (3.48)$$

где ξ не обязательно мало. Подставляя (3.48) в (3.39), мы получаем

$$\bar{w}_{lr} \propto \left[\frac{A_1 g \delta}{E_c} \Theta_2 \left(\frac{T_*}{\pi T} \sin \frac{\pi |D|}{8W} \right) \right]^{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_{lr}}{T} - \frac{D^2}{16WT} \right\} \quad (3.49)$$

а также

$$y = \frac{1}{1 + z^2}, \quad \text{где } z = \frac{T_*}{\pi T} \sin \frac{\pi |D|}{8W} \quad (3.50)$$

Чтобы записать частоту переходов в компактной форме, подобно (3.45), мы ввели новую функцию $\Theta_2(z)$

$$\Theta_2(z) = 1 + \frac{1}{z^2} \quad (3.51)$$

3.4.3 Переходная область

Уравнение на перевальную точку (3.37) при малых ξ может быть записано в виде

$$D + 4W\xi = \frac{4\bar{L}T}{\xi} \quad (3.52)$$

где мы считаем \bar{L} одним из коэффициентов, хотя оно и зависит от ξ . Решение этого “квадратного” уравнения имеет вид

$$\xi = -\frac{D}{8W} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{64W\bar{L}T}{D^2}} \right) \quad (3.53)$$

откуда и берется оценка для ширины переходной области $\delta D \sim 8\sqrt{W\bar{L}T}$. Поскольку этот переход может иметь место как в режиме упругого, так и неупругого катуннелирования, величина параметра \bar{L} может быть как мала по сравнению с \mathcal{N} , так и близка к \mathcal{N} . Но неравенство $\bar{L} \leq \mathcal{N}$ выполнено всегда, поэтому для величины δD справедлива оценка сверху (3.40).

Вне узкой области $D \lesssim \delta D$ квадратный корень в (3.53) можно разложить, и тогда мы получаем два решения, одно из которых $\xi = 4\bar{L}T/D$ описывает область слабого поляронного эффекта. Оно не является решением в полноценном смысле слова (поскольку \bar{L} тоже зависит от ξ), а скорее является уравнением пониженной степени для определения ξ . Второе решение $\xi = -D/4W$ отвечает области сильного поляронного эффекта.

Как уже отмечалось выше, переходная область является узкой и не дает никакого значимого вклада в физические наблюдаемые, так что на этом мы заканчиваем ее обсуждение.

3.5 Физическая картина поляронных прыжков

Активационные экспоненциальные множители в формулах (3.45) и (3.49) совпадают с соответствующими выражениями из стандартной теории одночастичных поляронов. Дополнительные модификации, специфические для нашей задачи возникают только в степенных множителях (эффективных интегралах перекрытия), благодаря многочастичной природе процесса котуннелирования.

3.5.1 Главная температурная зависимость: сходство со стандартными поляронами

Несмотря на то, что активационные множители были, для случая обычных поляронов, получены ранее в работах других авторов, ниже мы приведем физические аргументы, которые, на наш взгляд, позволяют наглядно объяснить происхождение этих множителей.

Сначала рассмотрим переход с выделением энергии, для которого $\Delta < 0$, то есть $E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q}) < E_{\text{ch}}(\vec{n}_i, \vec{q})$. Поскольку в результате такого перехода полная электростатическая энергия системы уменьшается, в промежуточных гранулах должны рождаться электрон-дырочные пары, чтобы унести избыток энергии. Поэтому, с экспоненциальной точностью, вероятность перехода в этом случае совпадает с вероятностью найти систему возбужденной в состоянии \vec{n}_i . Максимизация такой вероятности по \vec{q} дает

$$\bar{w} \propto \exp \left\{ -\tilde{E}_i/T \right\} \quad (3.54)$$

Теперь обратимся к переходу с поглощением энергии, то есть, к случаю $\Delta > 0$, то есть $E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q}) > E_{\text{ch}}(\vec{n}_i, \vec{q})$ (см. рис. 3.2). Поскольку электростатическая энергия увеличивается, для восполнения дефицита энергии в промежуточных гранулах должны будут аннигилировать какие-то электрон-дырочные пары. Но при низких температурах таких пар экспоненциально мало, так что вероятность их обнаружить пропорциональна $\exp(-\Delta/T)$. Частота переходов также содержит $\exp \{-E_{\text{ch}}(\vec{n}_i, \vec{q})/T\}$ – вероятность найти систему в состоянии \vec{n}_i . Вместе эти два вклада дают $w \propto \exp \{-E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q})/T\}$, и нам нужно его максимальное значение этой величины. В результате

$$\bar{w} \propto \exp \left\{ -\tilde{E}_f/T \right\} \quad (3.55)$$

Но что если \vec{q} , который доставляет минимум энергии $E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q})$, нарушает требование $\Delta > 0$? Ведь тогда уже не будет никакого экспоненциального множителя $e^{|\Delta|/T}$ при $\Delta < 0$! В этом случае истинный минимум энергии должен лежать на границе областей с $\Delta < 0$ и с $\Delta > 0$, то есть при $\Delta = 0$:

$$\bar{w} \propto \exp \left\{ -\min E_{\text{ch}}(\vec{n}_f, \vec{q})/T \right\}, \quad \vec{q}: \Delta = 0 \quad (3.56)$$

Находя минимум с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа, мы получаем:

$$\bar{w} \propto \exp \left\{ -\mathcal{E}_{\text{act}}/T \right\} \quad (3.57)$$

где \mathcal{E}_{act} дается формулой (2.26).

Для того, чтобы выяснить, какой из трех описанных выше типов решения дает наибольший вклад в вероятность перехода, нужно просто сравнить соответствующие значения показателей экспонент. Легко убедиться, что вклад граничного минимума (3.57) доминирует при $|\tilde{E}_i - \tilde{E}_f| < 4W$ и объясняет основную экспоненциальную зависимость в режиме поляронных прыжков (3.49). В обратном случае, при $|\tilde{E}_i - \tilde{E}_f| > 4W$, нам нужно выбрать максимум из (3.54) и (3.55), что как раз и приводит к результату $\bar{w} \propto \exp\{-\varepsilon_{if}/T\}$ из (3.43).

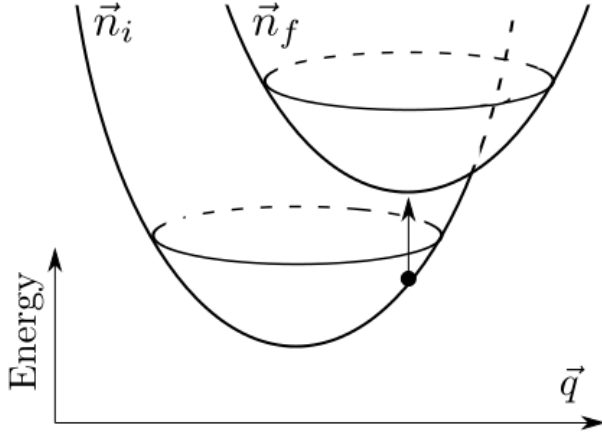


Рис. 3.2: Профиль электростатической энергии. Параболоиды отвечают разным состояниям \vec{n} . Стрелкой изображен Франк-Кондоновский переход системы между начальным и конечным состояниями.

3.5.2 Специфика неупругого котуннелирования: отличие от стандартных поляронов

В режиме слабого поляронного эффекта Франк-Кондоновская энергия Δ (равная суммарной энергии всех электро-дырочных пар) слабо отличается от своего “отрелаксированного” значения $\tilde{\Delta}$. Тогда типичная энергия одной пары

$$\varepsilon_{\text{inel}} \sim \Delta/\bar{L} \approx \tilde{\Delta}/\bar{L} \sim \mathcal{L}T \gg T \quad (3.58)$$

где $\mathcal{L} \sim 10$ – большой логарифмический множитель (см. далее, а также [13]).

Суть поляронного эффекта состоит в том, что оптимальное значение \vec{q} сдвигается так, чтобы понизить Δ . Согласно описанной выше физической картине, при переходе в присутствии сильного поляронного эффекта оптимум должен отвечать $\Delta = 0$, см. (3.56). Однако проведенное в разделе 3.4 более точное вычисление (с учетом зависимости от Δ степенного множителя в w) показывает, что на самом деле для поляронов в гранулированных металлах величина Δ хотя и относительно мала, но конечна, а не равна нулю, как для обычных “одночастичных” поляронов. Именно, как как следует из результатов раздела 3.4.2, в режиме сильного поляронного эффекта $\Delta \sim \bar{L}T$. Это значит, что

$$\varepsilon_{\text{inel}} \sim \Delta/\bar{L} \sim T \quad (3.59)$$

Есть другой способ это увидеть: при сильном поляронном эффекте интеграл (3.36) сходится на $u \equiv tT \lesssim 1$, а значит интегралы по неупругим энергиям (3.29) сходятся именно благодаря знаменателям, то есть при $\varepsilon_{\text{inel}} \sim T$.

Таким образом мы пришли к выводу о том, что, при переходе от электронных к поляронным прыжкам, характерные энергии электрон-дырочных пар уменьшаются от значения $\mathcal{L}T$ до T .

Глава 4

Проводимость в модели короткодействующего взаимодействия

Следуя общей философии прыжковой проводимости, мы вводим сетку кондактансов $g_{ij} \propto \bar{w}_{ij}$ Миллера-Абрахамса (см. рис. 4.1), которая соединяет все пары гранул. Как обычно, при низких температурах в проводимости решающую роль играют удаленные пары резонансных гранул, так что можно использовать наши предыдущие результаты, чтобы записать кондактансы в виде

$$g_{ij} \sim \exp \left\{ -\frac{\mathcal{E}_{ij}}{T} - \frac{2|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{a_{ij}} \right\}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ – позиции центров гранул, a_0 есть среднее расстояние между соседними гранулами (обычно a_0 приблизительно равно их диаметру), так что $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \equiv a_0 \mathcal{N}_{ij}$. “Длина затухания” a_{ij} записывается в форме

$$-\frac{2a_0}{a_{ij}} = \ln \left(\frac{A_1 g \delta}{E_c} \right) + \begin{cases} \ln \Theta_1 \left(\frac{D_{ij}}{2T_* \mathcal{N}_{ij}} \right), & (D_{ij} > 0), \\ \ln \Theta_2 \left(\frac{T_*}{\pi T} \sin \frac{\pi |D_{ij}|}{8W_{ij}} \right), & (D_{ij} < 0), \end{cases} \quad (4.2)$$

$$D_{ij} \equiv |\varepsilon_i - \varepsilon_j| - 4W_{ij}, \quad W_{ij} \equiv W_i + W_j, \quad (4.3)$$

Наличие зависимость длины затухания a_{ij} от r_{ij} и характеристик гранул нетипично для прыжковой проводимости, но эта зависимость всего лишь логарифмическая, и ее можно легко учесть (см. далее).

А вот энергия активации является стандартной для поляронных задач:

$$\mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \begin{cases} 0, & (D_{ij} > 0), \\ \frac{D_{ij}^2}{16W_{ij}}, & (D_{ij} < 0), \end{cases} \quad (4.4)$$

Таким образом, мы пришли к системе гранул, каждая из которых характеризуется своим положением \mathbf{r}_k , энергией ε_k , и “барьером” W_k . Очевидно, при низкой температуре прыгающие электроны предпочитают “останавливаться” только на резонансных

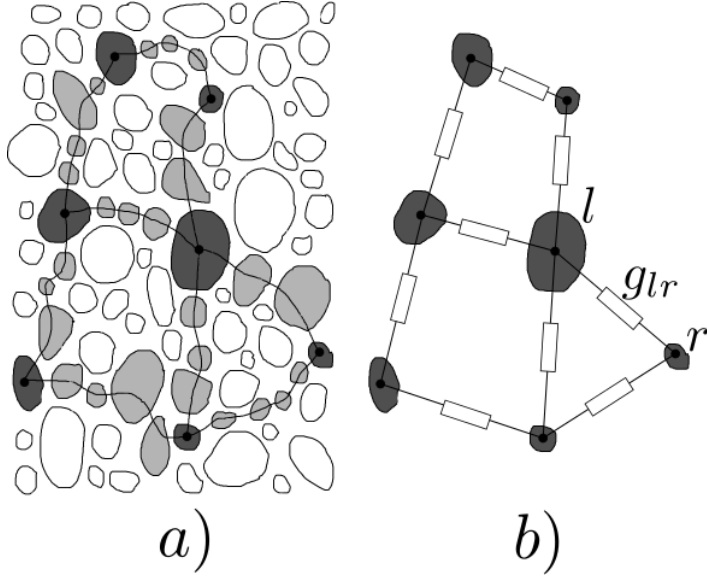


Рис. 4.1: а) Образец гранулированного материала. Резонансные гранулы показаны темным цветом. Электроны совершают многократное котуннелирование через серые промежуточные гранулы. б) Эквивалентная сетка кондактансов Миллера-Абрахамса.

гранулах – у которых мало ε и W , в то время как нерезонансные гранулы с типично большим ε и W служат только как промежуточные, на них электроны находятся только виртуально. Случайные величины ε_k и W_k могут быть как скоррелированы, так и нескоррелированы, в зависимости от физических особенностей системы. В этой работе мы рассмотрим модель, в которой все высоты барьеров одинаковы, $W_i = W_j = W/2$ для любой пары i, j .

4.1 Перколяция

Мы пришли к задаче перколяции между узлами, случайно распределенными в $d + 1$ -мерном пространстве (d компонент радиус-вектора \mathbf{r}_i и “энергия” ε_i). Плотность узлов в этом пространстве имеет смысл плотности резонансных гранул, основные состояния которых почти вырождены. В модели Мотта эта плотность считается постоянной:

$$\nu(0) = \frac{n_g P(\gamma = \pm 1/2)}{E_c}, \quad (4.5)$$

где $P(\gamma = \pm 1/2)$ есть плотность вероятности иметь $\gamma = 1/2$ (такая же, как для $\gamma = -1/2$). Если представить кондактанс в виде $g_{ij} \propto \exp\{-\xi_{ij}\}$, то критерий связности в таком пространстве будет $\xi_{ij} < \xi$. Согласно пертурбативному подходу в перколяции [2], нужно разбить ξ_{ij} и ξ на две части $\xi_{ij} = \xi_{ij}^0 + \delta\xi_{ij}$ и $\xi = \xi^0 + \langle \delta\xi \rangle_{\xi_{ij}^0 = \xi^0}$, и после этого определить ξ^0 из невозмущенной перколяционной задачи $\xi_{ij}^0 < \xi^0$, а $\delta\xi$ из требования $\langle \delta\xi \rangle = 0$. В нашем случае удобно разбить ξ_{ij} следующим образом

$$\xi_{ij}^0 = \frac{\varepsilon_{ij}}{T} + \mathcal{N}_{ij} \left[\ln \frac{E_c}{g\delta A_1} - \chi \right] + \frac{1}{T} \begin{cases} 0, & \text{если } D_{ij} > 0 \\ \frac{D_{ij}^2}{16WT}, & \text{если } D_{ij} < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\delta\xi_{ij} = \mathcal{N}_{ij} [\chi - \Phi(D_{ij})], \quad \Phi(D_{ij}) = \begin{cases} \ln \Theta_1 \left(\frac{D_{ij}}{2T_* \mathcal{N}_{lr}} \right), & \text{если } D_{ij} > 0 \\ \ln \Theta_2 \left(\frac{T_*}{\pi T} \sin \frac{\pi |D_{ij}|}{8W} \right), & \text{если } D_{ij} < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Итак, прежде всего нужно решить невозмущенную задачу.

4.1.1 Невозмущенная задача: классические поляроны

Решение перколяционной задачи для классических поляронных прыжков было дано Фойгелем и др. [20] для различных функций распределения барьеров. Как уже упоминалось, мы рассмотрим только случай постоянной высоты барьера. Ниже приведенное решение основано на оригинальной статье [20].

Следуя работе [20], удобно выделить из величины ξ_{ij}^0 постоянное слагаемое W/T и записать критерий связности можно записать в виде

$$\tilde{\xi}_{ij} \equiv \xi_{ij}^0 - W/T < \xi^0 \quad (4.8)$$

где

$$\tilde{\xi}_{ij} = \mathcal{L}\mathcal{N}_{ij} + \frac{\varepsilon_{ij} + \Lambda_{ij}}{T} \quad (4.9)$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} -W, & |\varepsilon_i - \varepsilon_j| > 4W \\ \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_j)^2}{16W} - \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_j|}{2}, & |\varepsilon_i - \varepsilon_j| < 4W \end{cases} \quad (4.10)$$

и мы ввели величину

$$\mathcal{L} = \ln \frac{E_c}{g\delta A_1} - \chi, \quad (4.11)$$

связанную с “длиной затухания волновой функции” a соотношением $a = 2a_0/\mathcal{L}$. Параметр \mathcal{L} включает в себя до сих пор не определенную величину χ , которая будет определена лишь позже из условия на возмущение $\langle \delta\xi \rangle = 0$. Дальше, как обычно, мы вводим безразмерную энергию ζ и расстояние \mathbf{s} , безразмерную концентрацию и безразмерную температуру согласно

$$\zeta = \varepsilon/\varepsilon_{\max}, \quad \varepsilon_{\max} = \xi^0 T \quad (4.12)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}/r_{\max}, \quad r_{\max} = a_0 \xi^0 / \mathcal{L} \quad (4.13)$$

$$\tilde{\nu} = \nu(0)\varepsilon_{\max} r_{\max}^d = \frac{T a_0^d \nu(0)}{\mathcal{L}^d} \xi_0^{d+1} \quad (4.14)$$

$$\tau = \frac{T \xi^0}{W} \quad (4.15)$$

В терминах этих переменных можно сформулировать безразмерную задачу протекания

$$s_{ij} + \zeta_{ij} + \lambda_{ij}(\tau) < 1, \quad (4.16)$$

$$\lambda_{ij}(\tau, \zeta_i, \zeta_j) = \begin{cases} -\frac{1}{\tau}, & \tau|\zeta_i - \zeta_j| > 4 \\ \tau \frac{(\zeta_i - \zeta_j)^2}{16} - \frac{|\zeta_i - \zeta_j|}{2}, & \tau|\zeta_i - \zeta_j| < 4 \end{cases} \quad (4.17)$$

В модели Мотта ζ_k равномерно распределены в полосе $|\zeta_k| < 1$. Перколяция в такой задаче наступает при некотором критическом значении безразмерной концентрации

$\tilde{\nu}_c(\tau)$. После того, как эта концентрация найдена, значение параметра ξ_0 можно определить из (4.14):

$$\xi^0(\tau) = \left(\frac{\mathcal{L}^d \tilde{\nu}_c(\tau)}{\nu(0) T a_0^d} \right)^{\frac{1}{d+1}} \quad (4.18)$$

Наконец, проводимость имеет вид

$$\sigma \propto \exp \left\{ -\frac{W}{T} - \xi^0(\tau) \right\} \equiv \exp \left\{ -\frac{W}{T} f(\eta) \right\} \quad (4.19)$$

где

$$\eta = \frac{1}{W} (T^d T_M)^{\frac{1}{d+1}} \quad (4.20)$$

Универсальная функция $f(\eta)$ численно найдена в работе [20], где она была представлена с помощью двухпараметрической интерполяционной формулы

$$f(\eta) = 1 + \eta[1 - A e^{-B\eta}] \quad (4.21)$$

Подгоночные параметры A и B приведены в таблице 4.1.

	A	B
d=2	0.137	0.0759
d=3	0.109	0.0612

Таблица 4.1: Параметры универсальной функции $f(\eta)$ (заимствовано из [20])

Видно, что при высокой температуре $f(\eta) \approx \eta$ тоже велико, и проводимость подчиняется закону Мотта

$$\sigma \propto \exp \left\{ - (T_M/T)^{1/(d+1)} \right\}, \quad T \gg T_{\text{cross}} \sim W(W/T_M)^{1/d}, \quad (4.22)$$

причем Моттовская температура T_M определяется как

$$T_M = \mathcal{L}^d \frac{\tilde{\nu}_c(\infty)}{\nu(0) a_0^d} \quad (4.23)$$

где $\tilde{\nu}_c^{(2D)}(\infty) = 1.75$ и $\tilde{\nu}_c^{(3D)}(\infty) = 2.85$ [13].

Если же температура низкая, то $f(\eta) \approx 1 + (1 - A)\eta$ только слабо отличается от 1, и проводимость следует закону Аррениуса с Моттовским множителем в качестве относительно малой поправки, хотя ее абсолютное значение велико:

$$\sigma \propto \exp \left\{ - (W/T) - \left(\tilde{T}_M/T \right)^{1/(d+1)} \right\}, \quad T \ll T_{\text{cross}} \quad (4.24)$$

причем \tilde{T}_M отличается от T_M только численным множителем.

Чтобы закончить описание закона проводимости, нужно установить вид параметра \mathcal{L} . Он входит в Моттовскую температуру (4.23), которая, в свою очередь, определяет зависимость η от температуры. Это подводит нас к следующему шагу в перколяционной задаче.

4.1.2 Определение параметра \mathcal{L} с помощью метода возмущений в перколяции

Условие $\langle \delta\xi \rangle = 0$ означает

$$\chi = \frac{1}{\langle \mathcal{N} \rangle} \left\langle \mathcal{N} \left[\theta(D) \ln \Theta_1 \left(\frac{D}{2T_* \mathcal{N}} \right) + \theta(-D) \ln \Theta_2 \left(\frac{T_*}{\pi T} \sin \frac{\pi |D|}{8W} \right) \right] \right\rangle \quad (4.25)$$

где усреднение, вообще говоря, производится по бесконечному перколяционному кластеру невозмущенной задачи. Если считать этот кластер однородным – предположить, что все точки в $d+1$ -мерном пространстве, лежащие внутри допустимой области (4.16), с равной вероятностью могут оказаться принадлежащими бесконечному кластеру, то усреднение сведется к следующему:

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \frac{\int d\zeta d\zeta' d\mathbf{s} \mathcal{F}(\zeta, \zeta', \mathbf{s}) \delta \left(1 - s - \frac{|\zeta| + |\zeta'| + |\zeta - \zeta'|}{2} - \lambda(\tau, \zeta, \zeta') \right)}{\int d\zeta d\zeta' d\mathbf{s} \delta \left(1 - s - \frac{|\zeta| + |\zeta'| + |\zeta - \zeta'|}{2} - \lambda(\tau, \zeta, \zeta') \right)} \quad (4.26)$$

Обоснование такого “однородного усреднения” и результаты численной проверки для некоторых случаев приведены в [2]. Впрочем, нужно иметь в виду, что однородное усреднение ни в коем случае не является точным и даже не обосновано наличием какого-либо малого параметра. Некоторое улучшение процедуры усреднения, основанное на теории цветной перколяции и самосогласованно учитывающее неоднородность бесконечного кластера, было предложено в [28] (см. также [31]). Как правило, однако, уже однородное усреднение дает неплохой результат, поэтому здесь мы им и ограничимся.

В выражении (4.25) можно интегрировать все переменные, за исключением последней, так что χ можно представить в виде интеграла по всего лишь одной переменной. Однако, такое вычисление очень громоздко и не является необходимым, так как мы все равно знаем лишь численную интерполяцию функции $f(\eta)$. Поэтому мы ограничимся обсуждением χ для самых важных предельных случаев: электронных и поляронных прыжков.

Электронные прыжки (поляронный эффект отсутствует)

Вычисление для этого случая было выполнено в [13], и мы приводим здесь только результат:

$$\chi(z) \approx \begin{cases} 0, & z \ll 1 \\ \ln z^2 - b, & z \gg 1 \end{cases} \quad \text{где } z = \frac{T\mathcal{L}}{2T_*} \text{ и } b = \begin{cases} 1/3, & \text{for } d = 2 \\ 1, & \text{for } d = 3 \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \ln \frac{E_c}{A_1 g \delta}, & \text{elastic} \\ \ln \frac{4e^b E_c^2}{A_2 g T^2 \mathcal{L}^2}, & \text{inelastic} \end{cases} \quad (4.28)$$

Кроссовер от упругого к неупругому многократному котуннелированию происходит при температуре $T_c \sim T_*/\mathcal{L}$, что в \mathcal{L} раз ниже, чем при котуннелировании через одну квантовую точку [25].

Заметим, что, благодаря условиям $g \ll 1$ и $T, \delta \ll E_c$, как и ожидалось, параметр \mathcal{L} оказался большим в обоих случаях – как при упругом, так и при неупругом котуннелировании.

Поляронные прыжки (очень сильный поляронный эффект)

В режиме очень сильного поляронного эффекта $\varepsilon_i, \varepsilon_j \ll W$, поэтому $D \approx -4W$, и следовательно $\sin \frac{\pi|D|}{8W} \approx 1$. В этом случае из (4.25) сразу же следует

$$\chi = \ln \left[1 + \left(\frac{\pi T}{T_*} \right)^2 \right] \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L} = \ln \left\{ \frac{E_c}{A_1 g \delta} \left[1 + \left(\frac{\pi T}{T_*} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \quad (4.30)$$

Последняя формула описывает не только упругий и неупругий пределы, но также и кроссовер между ними, который в этом случае происходит уже при температуре T_*/π . Опять, как и в случае электронных прыжков, параметр \mathcal{L} оказался большим как при упругом, так и при неупругом котуннелировании.

На этом мы заканчиваем обсуждение модели с короткодействующим взаимодействием и переходим к модели с дальнодействием.

Глава 5

Системы с дальнодействием

Во многих случаях дальнодействующим характером взаимодействия электронов пренебрегать нельзя, и для адекватного описания таких систем матрицы \hat{U} и \hat{K} нельзя считать диагональными. В любой системе проводников (как и в наших массивах гранул) “голое” Кулоновское взаимодействие модифицируется благодаря емкостям металлических частей и поляризации диэлектрических частей. В некоторых случаях достаточно ввести эффективную диэлектрическую постоянную, чтобы учесть оба эти экранирующих эффекта, но в других случаях матрица взаимодействия \hat{U} может быть значительно более сложной.

Конечно, \hat{U} зависит от размеров гранул, их взаимного расположения и т.д., но эти факторы не являются главным источником беспорядка в системе. Действительно, в работе [11] было показано, что беспорядок в размерах гранул не может привести к конечной плотности состояний на уровне Ферми, а значит не может обеспечить одно из ключевых требований для возникновения прыжковой проводимости. Поэтому разумно будет пренебречь таким беспорядком и считать, что массив гранул обладает трансляционной симметрией и состоит из одинаковых гранул. Необходимый для адекватного описания системы беспорядок при этом будет обеспечен случайным вектором $\vec{\gamma}$.

5.1 Матрица взаимодействия

Сейчас мы займемся электростатической задачей о нахождении матрицы взаимодействия \hat{U} в массивах из гранул, что немного выводит нас из общего русла, но это сделать необходимо, а полученные результаты полезны и в применении к другим задачам.

Присутствие заряженных примесей в системе, вообще говоря, нельзя учесть только с помощью введения соответствующих членов в (2.1); нужно также модифицировать обратную матрицу емкостей \hat{U} . Однако, если концентрация таких примесей мала, то это изменение не является ключевым, и его можно не учитывать. Здесь мы ограничимся рассмотрением именно такой ситуации.

Итак, рассмотрим бесконечный *регулярный массив одинаковых проводящих гранул*. Массив предполагается плотно упакованным, так что период решетки считается приблизительно таким же, как и размер гранул a , в то время как минимальная ширина d изолирующего промежутка между гранулами мала: $d \ll a$. При таких условиях основной вклад в матрицу \hat{C} вносят емкости зазоров C_{gap} , которые велики по срав-

нению с емкостями $C_{\text{sol}} \propto a$ уединенных гранул

$$\Lambda = C_{\text{gap}}/C_{\text{sol}} \gg 1 \quad (5.1)$$

Например, если гранулы сферические, то [32]

$$C_{\text{gap}}^{(\text{sph})} \approx (\varepsilon_{\text{gap}} a/8) \ln(a/d), \quad C_{\text{sol}}^{(\text{sph})} \approx \varepsilon_{\text{out}} a/2. \quad (5.2)$$

где ε_{gap} есть диэлектрическая постоянная материала зазора, ε_{out} есть диэлектрическая постоянная внешнего пространства. В трехмерном случае имеем просто $\varepsilon_{\text{out}} = \varepsilon_{\text{gap}}$, но в низкоразмерных массивах эти константы могут отличаться.

В реальных ситуациях значение C_{gap} сильно зависит от геометрии системы. Поскольку мы не собираемся ограничиваться какой-то определенной формой гранул, то будем считать C_{gap} независимой феноменологической характеристикой системы.

5.1.1 Главное приближение

В главном приближении по малому параметру $1/\Lambda \ll 1$ (см. (5.1)) полный заряд Q_i каждой гранулы i разделяется на z (z – координационное число) частей q_{ij} , каждая из которых локализована вблизи контакта с гранулой j . Тогда

$$q_{ij} = C_{\text{gap}}(V_i - V_j), \quad Q_i = \sum_{j:\langle ij \rangle} q_{ij}, \quad (5.3)$$

где суммирование идет по всем z соседям j гранулы i . Таким образом, сразу получаем матрицу емкостей

$$C_{ij} = -C_{\text{gap}}\Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \sum_{n:\langle in \rangle} (\delta_{jn} - \delta_{ji}) \quad (5.4)$$

Матрица Δ_{ij} часто называется “дискретным оператором Лапласа”. Трансляционная инвариантность нашего регулярного массива приводит к соотношению $C_{ij} = C_n$, где $n \equiv i - j$ и \mathbf{r}_n есть радиус-вектор, соединяющий i с j . В Фурье-представлении

$$C(\mathbf{k}) = \sum_n C_n e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n)} = C_{\text{gap}} \sum_{\vec{\delta}} (1 - e^{i(\mathbf{k} \cdot \vec{\delta})}) = 4C_{\text{gap}} \sum_{\mu} \sin^2(ak_{\mu}) \quad (5.5)$$

где суммирование идет по всем z векторам $\vec{\delta}$, соединяющим некоторую позицию в массиве с соседними. Таким образом, матрица U_n должна подчиняться уравнению $-C_{\text{gap}}\hat{\Delta} \cdot \hat{U} = 1$, из которого сразу же следует теорема Гаусса. Эта теорема, в частности, устанавливает простое соотношение между C_{gap} и элементами матрицы взаимодействия \hat{U} :

$$U_0 - U_1 \equiv \frac{4e^2}{zC_{\text{gap}}} \quad (5.6)$$

Для хвостов матрицы $\hat{U}(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg a$ получаем:

$$U(\mathbf{r}) = e^2 \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}}{C(\mathbf{k})} \approx \frac{e^2}{C_{\text{gap}}} \begin{cases} b^{(1D)} - r/2a, & \text{for } D = 1, \\ b^{(2D)} - \frac{\ln(r/a)}{2\pi}, & \text{for } D = 2, \\ \frac{a}{4\pi r}, & \text{for } D = 3. \end{cases} \quad (5.7)$$

Неизвестные константы $b^{(1D)}$, $b^{(2D)}$ возникли из-за патологической расходимости $U(\mathbf{r})$ на больших расстояниях в низкоразмерных массивах. В трехмерном случае расходимость не возникает, и мы получаем физический результат

$$U^{(3D)}(\mathbf{r}) \approx \frac{e^2}{\varepsilon_{\text{eff}} r}, \quad \varepsilon_{\text{eff}} = \frac{4\pi C_{\text{gap}}}{a} = 4\pi\Lambda\varepsilon_{\text{out}}. \quad (5.8)$$

который описывает эффективную диэлектрическую экранировку Кулоновского потенциала.

5.1.2 Противоречивость главного приближения в низкоразмерных случаях

Трехмерная версия (5.8) результата (5.7) остается верной на сколь угодно больших расстояниях r , если в системе нет Дебаевской экранировки (см. ниже). В низкоразмерных массивах это не так. В самом деле, 1D и 2D версии результата (5.7) не могут быть правильными на сколь угодно больших расстояниях из-за требования $U > 0$ (см., например, [33]). Это также говорит о том, что главное приближение по параметру Λ^{-1} , становится неприменимым на больших расстояниях в низкоразмерных массивах, и нужно учитывать малые поправки к \hat{C} , которые каким-то образом должны оказаться ключевыми для больших расстояний:

$$C_{ij} = -C_{\text{gap}}\Delta_{ij} + \delta C_{ij}, \quad \delta C_{ij} \sim C_{\text{sol}} \ll C_{\text{gap}}. \quad (5.9)$$

Результат (5.7) на самом деле подразумевает D -мерную электростатику, в которой линии поля привязаны к массиву. Нужно помнить, что для $D < 3$ наша система погружена в реальное трехмерное пространство (с диэлектрической постоянной ε_{out}), и линии поля в конечном счете покинут массив на больших расстояниях. Вследствие этого, диэлектрическая экранировка Кулоновского потенциала благодаря поляризации гранул перестает быть существенной на таких больших расстояниях, и устанавливается обычный голый трехмерный Кулон, так что закон (5.7) сменяется на

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{\varepsilon_{\text{out}} r}. \quad (5.10)$$

С математической точки зрения сразу же хочется разрешить выше описанную проблему путем введения поправки типа $\delta C_{ij}^{(0)} = C_0\delta_{ij}$. В \mathbf{k} -представлении получаем

$$C(\mathbf{k}) \approx C_{\text{gap}}(ka)^2 + C_0. \quad (5.11)$$

Однако, любая форма $C(\mathbf{k})$ с $C(0) \neq 0$ приводит к экспоненциальному затуханию взаимодействия

$$U(\mathbf{r}) \propto e^{-r/r_D}, \quad r \gg r_D = a(C_{\text{gap}}/C_0)^{1/2} \quad (5.12)$$

где r_D есть эффективный радиус экранировки. Такое затухание может быть физически оправданным только в системах с Дебаевской экранировкой, вызванной присутствием металлических затворов или слабой проводимости диэлектрической матрицы.

Если мы примем, что наша система глобально ведет себя как изолятор, то требование

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta C(\mathbf{k}) = 0 \quad (5.13)$$

должно соблюдаться. Это требование, в свою очередь, говорит о том, что $\delta C(\mathbf{k})$ должно быть неаналитической функцией k при $k = 0$ в низкоразмерных массивах. Действительно, единственное аналитическое поведение, удовлетворяющее вращательной симметрии, есть $\delta C(\mathbf{k}) \approx \text{const}$ (что, как мы выяснили, нам не подходит), либо $\delta C(\mathbf{k}) \propto k^2$ (что отвечает незначительной перенормировке константы C_{gap}).

Теперь мы приведем физические аргументы, позволяющие восстановить вид $\delta C(\mathbf{k})$ на количественном уровне.

Поскольку настоящая дальняя асимптотика $U(\mathbf{r})$ дается с помощью (5.10), можно найти поведение $C(\mathbf{k})$ на малых \mathbf{k} , или, точнее говоря $\delta C(\mathbf{k})$, преобразуя (5.10) по Фурье:

$$\delta C(\mathbf{k}) = \left(\int \frac{a^D d^D \mathbf{r}}{\varepsilon_{\text{out}} r} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right)^{-1} \approx \varepsilon_{\text{out}} a \begin{cases} -\frac{1}{2 \ln(|k|a)}, & \text{для } D = 1 \\ |k|a/2\pi, & \text{для } D = 2 \end{cases} \quad (5.14)$$

и окончательно

$$C(\mathbf{k}) = C_{\text{gap}} \begin{cases} (ka)^2 - \frac{1}{\Lambda \ln(|k|a)}, & \text{для } D = 1 \\ (ka)^2 + \frac{|k|a}{\pi \Lambda}, & \text{для } D = 2 \end{cases} \quad (5.15)$$

Таким образом, мы показали, что поправка в самом деле неаналитична и в самом деле доминирует на малых k .

Нужно иметь в виду, что основной результат (5.15) в форме суммы двух вкладов не является просто интерполяционной формулой между двумя предельными случаями: он также верен, когда оба вклада имеют один порядок величины; единственное условие его применимости есть $k \ll a^{-1}$. В самом деле, формула (5.15) представляет собой два первых члена в разложении $C(\mathbf{k})$ по малому параметру Λ^{-1} .

Чтобы увидеть кроссовер от низкоразмерной к 3D электростатике, нужно определить $C(\mathbf{r})$ и $U(\mathbf{r})$, используя выражения (5.15). Мы сделаем это только для 2D случая, т.к. не занимаемся рассмотрением прыжковой проводимости в 1D, но соответствующий вывод для одномерного случая можно найти в нашей работе [29].

5.1.3 Двумерный случай: переход от 2D к 3D электростатике

Делая обратное преобразование Фурье нижней строчки в (5.14), мы получаем

$$C^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{sol}} a^3}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\mathbf{k}| e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\frac{C_{\text{sol}}}{2\pi^2} \left(\frac{a}{r}\right)^3, \quad (5.16)$$

для больших расстояний $r \gg a$. Таким образом, хвост $C^{(2D)}(\mathbf{r})$ на больших $r \gg a$ полностью определяется поправочным членом, пропорциональным C_{sol} . Заметьте также, что недиагональные элементы C_{ij} отрицательны, что соответствует общему требованию (см. [33]). Аналогично, из нижней строчки (5.15) мы получаем

$$U^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{C_{\text{gap}}} F^{(2D)}(r/r_c^{(2D)}), \quad (5.17)$$

где

$$r_c^{(2D)} = \pi a \Lambda \gg a, \quad (5.18)$$

есть характерный масштаб расстояния, на котором происходит кроссовер, а универсальная функция

$$F^{(2D)}(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(zt) \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{4} [\mathbf{H}_0(z) - Y_0(z)] \quad (5.19)$$

может быть выражена с помощью функции Струве $\mathbf{H}_0(z)$ и функции Неймана $Y_0(z)$. Такой же результат был получен ранее в работе [34], где использовалась аналогия с задачей об экранировке точечного заряда, помещенного в изолирующую пленку, решенной Келдышем [35]

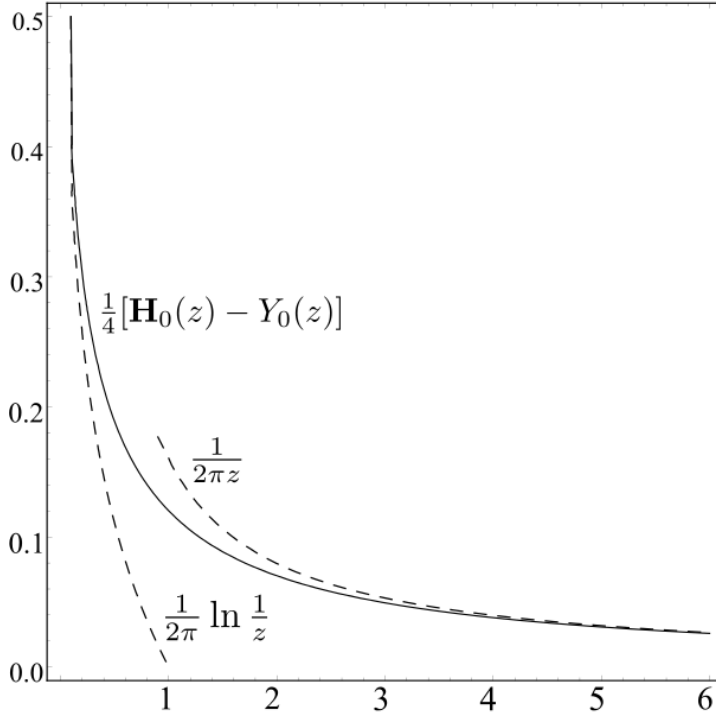


Рис. 5.1: График функции $F(z)$, определенной в (5.19). Ее асимптотики для больших и малых аргументов показаны пунктирной линией.

Общий вид функции F показан на рис.5.1. Ее асимптотики

$$F^{(2D)}(z) \approx \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \ln(1/z), & \text{for } z \ll 1, \\ 1/z, & \text{for } z \gg 1. \end{cases} \quad (5.20)$$

воспроизводят выражение (5.10) (нижняя строка) и 2D-версию выражения (5.7) (верхняя строка). Более того, сравнивая (5.20) с (5.7), можно определить неизвестную константу $b^{(2D)}$ входящую в выражение (5.7):

$$b^{(2D)} = \frac{1}{2\pi} \ln \Lambda \gg 1. \quad (5.21)$$

Таким образом, результат (5.17) описывает гладкий кроссовер от 2D электростатики, привязанной к двумерному массиву гранул, к обычной 3D электростатике, которая вступает в свои права, когда пространственный масштаб превышает $r_c^{(2D)}$. Энергия отталкивания двух электронов, помещенных на расстояние r друг от друга

$$V(r) = E_c F^{(2D)}(r/r_c^{(2D)}), \quad E_c = e^2/2C_{\text{gap}}. \quad (5.22)$$

равна $E_c \ln \Lambda/2\pi$ для ближайших соседей ($r = a$) и уменьшается очень незначительно (логарифмически) на расстояниях вплоть до $r \sim r_c^{(2D)}$, где начинает действовать обычный трехмерный закон Кулона $V(r) = e^2/\varepsilon_{\text{out}}r$.

На этом мы заканчиваем описание матрицы взаимодействия \hat{U} , но нужно еще разобраться с видом матрицы \hat{K} . Она нужна для вычисления высот поляронных барьеров W по формуле (2.25). В этой работе мы рассмотрим только случай, когда все барьеры одинаковы, и будем воспринимать W как некую феноменологическую постоянную. По этой причине обсуждение матрицы \hat{K} мы тоже отложим на будущее, а сейчас отметим лишь, что ее недиагональные элементы убывают с расстоянием, как производная от Кулоновского взаимодействия.

5.2 Частота переходов

Полного аналитического описания прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка в присутствии дальнедействующего Кулоновского взаимодействия, к сожалению, не существует по сей день, хотя качественное понимание возникло довольно давно (см [2]). Дальнедействующее взаимодействие создает корреляции в распределении электронов в основном состоянии системы, что выражается критерием Эфроса-Шкловского:

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_{ij}^{\text{int}} > 0 \quad \text{для любых состояний } i, j \quad (5.23)$$

Эти корреляции в итоге приводят к наличию мягкой щели в плотности состояний на уровне Ферми, что, в комбинации с аргументами Мотта, приводит к закону проводимости Эфроса-Шкловского.

Вычислительная сложность в описании VRH в гранулированных системах возникает, когда мы пытаемся произвести T-упорядочение в (3.8). В общем случае недиагональных матриц \hat{U}, \hat{K} нельзя производить это упорядочение в подпространстве каждой гранулы отдельно. Однако, как утверждалось в работе [13] в случае чисто упругого либо чисто неупругого многократного котуннелирования взаимодействие является эффективно короткодействующим. Обоснование такого утверждения приведено в диссертации [31].

В отсутствие поляронного эффекта кондактанс между двумя удаленными резонансными гранулами был получен в [13]

$$g_{ij} \propto \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ij}}{T}\right) \begin{cases} \left(\frac{g\delta\tilde{A}_1}{E_c}\right)^{\mathcal{N}}, & \text{elastic} \\ \left(\frac{e^2\tilde{A}_2g\tilde{\Delta}^2}{4\mathcal{N}^2E_c^2}\right)^{\mathcal{N}}, & \text{inelastic} \end{cases} \quad (5.24)$$

где \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 – неизвестные константы, а

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \max\{|\varepsilon_i|, |\varepsilon_j|\}, & \text{if } \varepsilon_i\varepsilon_j > 0 \\ |\varepsilon_i - \varepsilon_j| - \varepsilon_{ij}^{\text{(int)}}, & \text{if } \varepsilon_i\varepsilon_j < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\tilde{\Delta}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_j, & \text{if } \varepsilon_i\varepsilon_j > 0 \\ (\varepsilon_i - \varepsilon_j) - \varepsilon_{ij}^{\text{int}}\text{sgn}(\varepsilon_i - \varepsilon_j), & \text{if } \varepsilon_i\varepsilon_j < 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Таким образом, эффект взаимодействия в этом случае сводился только к изменению (с учетом взаимодействия) определения величин $\tilde{\Delta}_{ij}$ и ε_{ij} и к перенормировке (неизвестной) констант A_1, A_2 .

При одновременном учете поляронного эффекта и дальнедействующего взаимодействия аккуратно определить вид степенного множителя нам не удалось. Условно

можно сказать, что константы становятся неизвестными функциями F_1, F_2 параметров $D, W, \mathcal{N}T, T_* \sim (E_c \delta)^{1/2}$, причем вид этих функций зависит от конкретного закона, по которому взаимодействие убывает с расстоянием.

Вместе с тем, главная экспоненциальная зависимость g_{ij} от температуры, к счастью, может быть найдена: она имеет тот же (с точностью до измененных определений (5.25), (5.26)), что и в короткодействующем случае. В результате

$$g_{lr} \propto \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ij}}{T} - \frac{D_{ij}^2}{16W_{ij}T}\right) \begin{cases} \left[\frac{g\delta}{E_c} F_1(D, W, \mathcal{N}T, T_*)\right]^{\mathcal{N}}, & \text{elastic} \\ \left[\frac{e^2 g \tilde{\Delta}^2}{4\mathcal{N}^2 E_c^2} F_2(D, W, \mathcal{N}T, T_*)\right]^{\mathcal{N}}, & \text{inelastic} \end{cases} \quad (5.27)$$

где $D_{ij} = |\tilde{\Delta}_{ij}| - 4W_{ij}$, а W_{ij} определено выражением

$$W_{ij} = \frac{1}{8} \left\{ \left[\hat{U} \hat{K}^{-1} \hat{U} \right]_{ii} + \left[\hat{U} \hat{K}^{-1} \hat{U} \right]_{jj} - 2 \left[\hat{U} \hat{K}^{-1} \hat{U} \right]_{ij} \right\}, \quad (5.28)$$

которое следует из формулы (2.25). Еще раз подчеркнем, что вид функций F_1, F_2 нам неизвестен, мы знаем только, что при слабом поляронном эффекте (5.27) должно перейти в (5.24), то есть F_1, F_2 должны превратиться в константы \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 порядка единицы (численные их значения тоже, впрочем, неизвестны).

Прежде чем применять стандартные аргументы Эфроса-Шкловского к сетке проводимостей (5.27), нужно установить вид плотности состояний вблизи уровня Ферми.

5.3 Кулоновская щель в плотности состояний

Хорошо известно [2], что для Кулоновского взаимодействия в виде (5.8) плотность состояний имеет мягкую квадратичную щель на уровне Ферми в трехмерной системе:

$$\nu^{(3D)}(\varepsilon) = \frac{3\kappa^3 \varepsilon^2}{\pi e^6} \quad (5.29)$$

Если бы взаимодействие в двумерном случае также имело вид e^2/r , мягкая Кулоновская щель имела бы вид

$$\nu^{(2D)}(\varepsilon) = \frac{2|\varepsilon|}{\pi e^4} \quad (5.30)$$

Однако, согласно (5.17), голый Кулон устанавливается только на расстояниях $r \geq r_c$. Это значит, что на энергиях $\varepsilon \lesssim E_c$ плотность состояний по-прежнему имеет вид (5.30), но она должна быть видоизменена на больших энергиях $\varepsilon \gtrsim E_c$. Вычисление с помощью метода самосогласованного уравнения [30] показывает, что плотность состояний приблизительно постоянна в широкой области энергий, больших чем E_c , см. рис. 5.2.

Простые оценки показывают, что в большинстве реальных систем r_c не очень велико. Например, для сферических гранул, упакованных в квадратную решетку, критическое расстояние $r_c/a = \frac{\pi}{4} \varepsilon_{\text{gap}} \ln \frac{a}{d}$. Если $a/d \sim 10 - 20$ и пространство между гранулами заполнено диэлектриком с $\kappa_{\text{out}} \sim 1$, то мы имеем $r_c/a \approx 2$. Это значит, что промежуточная область сильного двумерного Кулона неважна для прыжковой проводимости. Более того, если система помещена на изолирующую подложку с большой κ_{out} , то r_c нужно еще разделить на эту большую κ_{out} , что сделает его еще меньше. В любом случае, для начала разумно сосредоточиться на случае, когда прыжки происходят на расстояния, превышающие r_c .

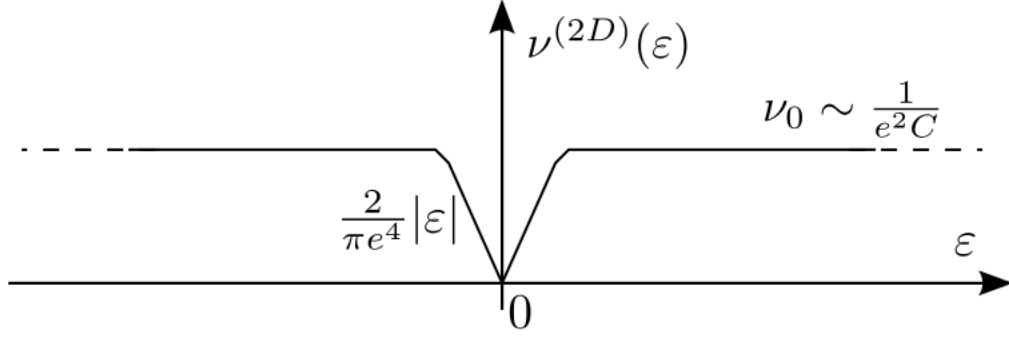


Рис. 5.2: Плотность состояний в плотно упакованном двумерном массиве.

5.4 Проводимость

Применяя далее стандартные аргументы Эфроса-Шкловского к случаю слабого поляронного эффекта (5.24) с плотностью состояний (5.29) и (5.30), мы получаем, как и в [13], что проводимость следует закону Эфроса-Шкловского с $T_{ES} = \mathcal{L}(T)E_c$, где

$$\mathcal{L}(T) = \begin{cases} c_1 \ln \left(\frac{E_c}{g\delta\bar{A}_1} \right), & T \ll T_c \\ c_1 \ln \left(\frac{4E_c^2}{e^2\bar{A}_2gT^2\mathcal{L}^2} \right), & T \gg T_c \end{cases} \quad (5.31)$$

а температура кроссовера между упругим и неупругим пределами есть $T_c \sim T_*/\mathcal{L}$; численная константа c_1 порядка единицы и зависит от размерности пространства и статистических свойств упаковки гранул.

В случае сильного поляронного эффекта в проводимости главным будет постоянный множитель $\exp\{-W/T\}$. Оптимальная критическая подсетка сопротивлений будет определяться из условия оптимизации следующего по величине множителя

$$\exp \left\{ -\frac{\tilde{\varepsilon}_{ij}}{T} \right\} [\dots]^{\mathcal{N}},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} |\varepsilon_i| + |\varepsilon_j|, & \varepsilon_i\varepsilon_j > 0 \\ |\varepsilon_i| + |\varepsilon_j| - \varepsilon_{ij}^{\text{int}}, & \varepsilon_i\varepsilon_j < 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

что приводит к возникновению дополнительного члена типа Эфроса-Шкловского в качестве относительно малой добавки (хотя ее абсолютно значение велико):

$$\sigma \propto \exp \left\{ -\frac{W}{T} - \left(\frac{T'_{ES}}{T} \right)^{1/2} \right\} \quad (5.33)$$

где T'_{ES} отличается от T_{ES} численной константой (c_2 вместо c_1) и присутствием дополнительных функций $F_{1,2}$ в определении величины \mathcal{L} , см. (5.27), (5.31).

Переход от электронных к поляронным прыжкам происходит при температуре

$$T_{\text{act}} \sim \frac{W^2}{T_{ES}} \quad (5.34)$$

Соотношение (5.34) является довольно общим: оно применимо для всех типов поляронов (в случае с постоянной высотой поляронного барьера) в твердых материалах, в массивах полупроводниковых квантовых точек и в гранулированных металлах. Нам не удалось найти экспериментальные данные для такого перехода в гранулированном металле, но данные из [21] по поляронному эффекту в массивах Ge/Si квантовых точек подтверждают результат (5.34) с численными коэффициентами ≈ 0.25 .

Глава 6

Заключение

6.1 Что уже удалось сделать

- Прежде всего, достигнуто качественное понимание физического механизма, ответственного за образование поляронов в гранулированных металлах.
- Получена основная формула (3.33) для вычисления частоты электронных переходов между резонансными гранулами в модели короткодействующего взаимодействия в присутствии поляронного эффекта, а также ее упрощенные варианты для случая слабого (3.45) и сильного (3.49) поляронного эффекта.
- В модели короткодействующего взаимодействия с помощью теории перколяции найдена зависимость проводимости от температуры (4.19), которая описывает переход от закона Мотта к закону Аррениуса. Отдельно описан переход от упругого к неупругому катуннелированию в режиме электронных и поляронных прыжков. Анализ проведен для случая постоянной высоты поляронного барьера.
- Для регулярных плотно упакованных массивов металлических гранул найдена обратная матрица емкостей в трехмерном (5.8) и двумерном (5.17) случаях. Этот результат нами уже опубликован в статье [29].
- Проанализирован случай дальнодействующего взаимодействия. С помощью качественных аргументов Эфроса-Шкловского получена проводимость. Найдена универсальная температура возникновения сильного поляронного эффекта (5.34), при которой должен происходить кроссовер между законом Эфроса-Шкловского и законом Аррениуса.

6.2 Что еще предстоит сделать

- Определить, как будет выглядеть проводимость при других функциях распределения барьеров, в частности таких, которые имеют степенные или экспоненциальные хвосты в нуле.
- Добавить в гамильтониан кинетическое слагаемое, которое позволит переменным q туннелировать. Это открывает дополнительный способ преодоления барьера, который, как известно, должен доминировать над активационным при

низких температурах. Часть работы в этом направлении уже сделана, в частности, получена формула для частоты переходов, подобная (3.33).

6.3 Благодарности

Автор этой работы высказывает огромную благодарность Алексею Соломоновичу Иоселевичу за множественные советы и помощь в решении этой задачи.

Глава 7

Список литературы

- [1] N. F. Mott and E. A. Davis, *Electron processes in non-crystalline materials* (Clarendon Press, Oxford, 1979);
- [2] B. I. Shklovskii and A. L. Efros, *Electronic Properties of Doped Semiconductors* (Springer-Verlag, Berlin, 1984);
- [3] N.F.Mott, *J. Non-Cryst. Solids*, **1**, 1 (1968);
- [4] A. L. Efros and B. I. Shklovskii, *J.Phys. C* **8**, L49 (1975);
- [5] B. Abeles, P. Sheng, M. D. Coutts, and Y. Arie, *Adv. Phys.*, **24**, 406, (1975);
- [6] I. S. Beloborodov, A. V. Lopatin, V. M. Vinokur, and K. B. Efetov, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 469 (2007);
- [7] T.Chui, G.Deutscher, P.Lindenfeld and W.L.McLean, *Phys. Rev. B* **23**, 6172 (1981);
C.J.Adkins, In: *Proceedings of the sixth international conference on hopping and related phenomena*, eds. O.Millo, Z.Ovadyahu (Jerusalem: Racah Institute of Physics, 1995), p.245;
- [8] D. Yu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 216802 (2004);
M. A. Rafiq *et al.*, *J. Appl. Phys.* **100**, 014303 (2006);
M. Salvato, *Phys. Rev. B*, **86**, 115117 (2012);
Mitsuru Inada *et al.*, *APEX* **8**, 105001 (2015);
- [9] P.Sheng, B.Abeles, Y.Arie, *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 44 (1973);
C.J.Simanek, *Solid State Commun.* **40**, 1021 (1981);
E. Z. Meilikhov, *JETP* **115**, 1484 (1999);
- [10] M.Pollak, C.J.Adkins, *Philos.Mag.* **B 65**, 855 (1992);
- [11] J.Zhang and B.I.Shklovskii, *Phys.Rev. B* **70**, 115317 (2004);
- [12] I.P.Zviagin and R.Keiper, *Philos.Mag.* **B 81**, 997 (2001);
V. I. Kozub, V. M. Kozhevin, D. A. Yavsin, and S. A. Gurevich, *JETP Lett.* **81**, 226 (2005);

- [13] M. V. Feigel'man and A. S. Ioselevich, JETP Lett. **81**, 277 (2005);
- [14] D. A. Averin and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett., **65**, 2446 (1990);
- [15] Y. V. Nazarov and Y. M. Blanter, *Quantum Transport, Introduction to nanoscience* (Cambridge University Press, 2009);
- [16] A. V. Aleshin, A. N. Ionov, R. V. Parfeniev, I. S. Shlimak, A. Heinrich, I. Schumann, and D. Elefant, Fiz. Tverd. Tela. (Leningrad), **30**, 696 (1988);
H. Vinzelberg, A. Heinrich, G. Gladun, D. Elefant, Philos. Mag., **B 65**, 651 (1992);
R. W. van der Heijden, G. Chen, A. T. A. M. de Waele, H. M. Gijssman, F. P. B. Tielens, Solid. State Commun. **78**, 5 (1991);
V. Voegelé, S. Kalbitzer, K. Böringer, Philos. Mag., **B 52**, 153 (1985);
I. Terry, T. Penney, S. von Molnar, P. Becla, Phys. Rev. Lett. **69**, 1800 (1992);
P. Dai, Y. Zhang, M. P. Sarachik, Phys. Rev. Lett. **69**, 1804 (1992);
J. J. Kim, H. J. Lee, Phys. Rev. Lett. **70**, 2798 (1993);
- [17] A. S. Ioselevich, Phys. Rev. Lett. **71**, 1067 (1993);
- [18] S. D. Baranovskii, V. G. Karpov, Sov. Phys. Semicond. **20**, 1811 (1986);
- [19] A. S. Ioselevich, JETP Lett. **43**, 188 (1986);
- [20] M. Foygel, R. D. Morris, and A. G. Petukhov, Phys. Rev. B **67**, 134205 (2003);
- [21] A. I. Yakimov, A. V. Dvurechenskii, G. M. Min'kov, A. A. Sherstobitiov, A. I. Nikiforova, and A. A. Bloshkina, JETP **100**, 722 (2005);
- [22] Hui Xing, Wenjie Kong, Chaehyun Kim, Sheng Peng, Shouheng Sun, Zhu-An Xu, and Hao Zeng, J. Appl. Phys. **105**, 063920 (2009);
- [23] Arjan J. Houtepen, Daan Kockmann and Daniel Vanmaekelbergh, Nano Lett. **8**, 3516 (2008);
- [24] B. Skinner, T. Chen, and B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **85**, 205316 (2012);
- [25] L. I. Glazman, M. Pustilnik, cond-mat/0501007;
- [26] I. S. Beloborodov, A. V. Lopatin, V. M. Vinokur, Phys. Rev. **B 72**, 125121 (2005);
- [27] V. I. Melnikov, Phys. Lett. **A 176** (3-4), (1993);
Christoph Wasshuber, Computational Single-Electronics (Springer-Verlag, Vienna, 2001);
- [28] A. S. Ioselevich, Phys. Rev. Lett. **74**, 1411 (1995).
- [29] A. S. Ioselevich and V. V. Sivak, Phys. Rev. B **92**, 224203 (2015);
- [30] S. D. Baranovskii, B. I. Shklovskii, A. L. Efros, JETP, **51**, 199 (1980);
- [31] A. S. Ioselevich, Doctor of Sc. dissertation "Electronic and Structural Properties of Strongly Disordered Materials", 2005;

- [32] A. Russel, Proc. R. Soc. London, **A 82**, 524 (1909); J. Lekner, Proc. R. Soc. London **A 468** 2829 (2012);
- [33] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Electrodynamics of continuous media, Chapter 1, p.6. Pergamon press, 1963
- [34] J. E. Mooij and G. Schoen, *Single charges in 2-dimensional junction arrays*, in: *Single charge tunneling*, eds. H. Grabert and M. H. Devoret, pp. 275-310, Plenum Press, NY, (1996);
- [35] L. V. Keldysh, JETP Letters, **29**, 658, (1979);