

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Тепловой транспорт в одномерной спиновой
цепочке с беспорядком»
(Дипломная работа магистра)

студента 028 группы
Побойко И.В.
научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. Фейгельман М.В.

Черноголовка, 2016

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Исследуемая модель	3
1.2	Мотивация	5
1.3	Свойства чистой системы	7
1.4	Жидкость Латтинджера	10
1.5	Фазовая диаграмма для неупорядоченной системы	18
1.6	Диаграмная техника Келдыша	20
2	Затухание квазичастиц в отсутствии беспорядка	24
2.1	Пропагаторы	24
2.2	Низший порядок теории возмущений	26
2.3	Самосогласованное вычисление	33
2.4	Роль поправок к времени жизни квазичастиц	38
2.5	Корреляционные функции	39
3	Транспортные свойства системы с беспорядком	45
3.1	Теория линейного отклика	45
3.2	Токи	47
3.3	Келдышево описание	49
3.4	Теория возмущений	51
3.5	Кинетические коэффициенты	53
4	Заключение	59
5	Список литературы	62

Глава 1

Введение

1.1 Исследуемая модель

В этой работе мы будем исследовать свойства элементарных возбуждений одномерной ХХЗ-цепочки спинов $1/2$ с беспорядком в виде случайного магнитного поля вдоль оси анизотропии z на каждом узле, гамильтониан которой записывается следующим образом:

$$\hat{H} = - \sum_{n=1}^N \left[J \left(\hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y + \Delta \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right) + (h + h_n) \hat{S}_n^z \right] \quad (1.1)$$

Для такой цепочки для удобства дальнейших вычислений мы будем ставить периодические граничные условия $\hat{S}_{N+1}^\alpha \equiv \hat{S}_1^\alpha$.

Помимо беспорядка, задаваемого набором случайных независимых величин h_n , имеющих симметричное распределение с нулевым средним $\langle h_n \rangle = 0$ и конечную дисперсию $\langle h_n^2 \rangle$, к системе может быть приложено однородное магнитное поле h . При этом как магнитное поле, так и беспорядок мы будем считать маленькими по сравнению с «шириной зоны» J (то есть $h \ll J$ и $\langle h_n^2 \rangle \ll J^2$ соответственно).

Помимо этого, мы предполагаем, что система находится в термодинамическом равновесии при некоей температуре T ; эта температура также считается малой по сравнению с шириной зоны $T \ll J$, так что интересовать нас будет только низкоэнергетические возбуждения.

Параметр анизотропии Δ будет рассматриваться в пределах $-1 < \Delta < 1$ — как будет пояснено ниже, именно в этом пределе в спектре элементарных

возбуждений системы отсутствует щель, и поэтому в этой области параметров низкоэнергетическая физика системы наиболее интересна.

Отметим, что знак обменного интеграла в XU -плоскости для модели (1.1) можно изменить каноническим преобразованием:

$$\begin{cases} \hat{S}_n^x \mapsto (-1)^n \hat{S}_n^x, \\ \hat{S}_n^y \mapsto (-1)^n \hat{S}_n^y, \\ \hat{S}_n^z \mapsto \hat{S}_n^z. \end{cases} \quad (1.2)$$

Такое преобразование, однако, не затрагивает знак анизотропного члена $J\Delta$, поэтому в дальнейшем мы зафиксируем знак обменного интеграла $J > 0$. При этом случай $\Delta > 0$ будет соответствовать ферромагнитному случаю, а $\Delta < 0$ — антиферромагнитному.

Для спинов $1/2$ имеет место преобразование Йордана-Вигнера, представляющее собой операторное тождество (и тождественность соответствующих гильбертовых пространств), и позволяющее связать спиновые операторы с операторами рождения и уничтожения бесспиновых фермионов, заданных на узлах:

$$\begin{cases} \hat{S}_n^+ = \hat{\psi}_n^\dagger \times (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i}, \\ \hat{S}_n^- = (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i} \times \hat{\psi}_n, \\ \hat{S}_n^z = \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (1.3)$$

для которых выполнены коммутационные соотношения $\{\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_m^\dagger\} = \delta_{nm}$. Вводя операторы флуктуации фермионной плотности согласно $\hat{\rho}_n = \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n - 1/2 \equiv \hat{S}_n^z$, гамильтониан (1.1) тождественно переписывается согласно следующему выражению:

$$\hat{H} = -J \sum_{n=1}^N \left[-\frac{1}{2} (\hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_{n+1} + h.c.) + \Delta \hat{\rho}_n \hat{\rho}_{n+1} + \frac{h_n + h}{J} \hat{\rho}_n \right] \quad (1.4)$$

Из структуры этого гамильтониана видно, что параметр J отвечает кинетической энергии фермионов; параметр Δ соответствует силе взаимодействия между ними (при этом ферромагнитный случай $\Delta > 0$ соответствует притяжению между ними, а антиферромагнитный $\Delta < 0$ — отталкиванию). Беспорядок отвечает случайному потенциалу для фермионов, а однородное магнитное поле h — сдвигу химпотенциала.

1.2 Мотивация

Одномерные спиновые цепочки, описываемые гамильтонианом (1.1), представляют собой прекрасный пример сильно-коррелированных систем, и которые хорошо предназначены для изучения их свойств.

Одним из наиболее интересных явлений, проявляемых в неупорядоченных системах, является локализация Андерсона. Само явление заключается в том, что в отсутствие взаимодействия в одномерной системе наличие сколь угодно малого беспорядка приводит к полной локализации всех собственных волновых функций. При этом длина локализации — характерный масштаб локализованных волновых функций — по порядку равен длине свободного пробега. Как следствие, в такой системе полностью отсутствует диффузия; частица, будучи помещённой в такую систему, будет «заперта» в конечной области пространства, размер которой как раз определяется длиной локализации. Транспорт через такую систему отсутствует.

Локализация электронов в системе с беспорядком может быть понята на квазиклассическом уровне как результат деструктивной интерференции пар траекторий, соответствующих рассеянию на некотором наборе примесей, и которые отличаются друг от друга операцией обращения времени. Она прямо связана с вероятностью возврата при диффузионном движении частицы в неупорядоченной среде, и тем самым она тем сильнее, чем ниже размерность пространства. В размерностях $d = 1$ и $d = 2$, все волновые функции при отсутствии взаимодействия являются локализованными, однако в размерности 2 длина локализации экспоненциально велика по параметру $k_F l$ (l — длина свободного пробега). В размерности 3 же имеется локализационный переход при некой критической силе беспорядка.

Взаимодействие существенно усложняет картину, поскольку соответствующая задача является многочастичной. В старших размерностях $d \geq 2$ роль взаимодействия может быть понята с точки зрения всё той же интерференции: неупругие процессы «сбивают фазу», мешая ей. Однако, в размерностях $d = 1$, а также в квантовых точках («нульмерье»), где эффекты от беспорядка наиболее сильны, имеет место явление многочастичной локализации — локализации состояний в многомерном Фоковском пространстве. Человечество ещё далеко

от полного понимания, что же происходит в таких системах.

Исследуемая в данной работе модель, описанная в разделе (1.1), очень интересна с точки зрения многочастичной локализации — эта модель одномерна, и в ней присутствует сильное взаимодействие. Она также интересна тем, что “чистая” модель, являясь по-прежнему задачей с сильным взаимодействием, допускает точное решение, описанное ниже в разделе (1.3.2); поэтому спектр и структура его элементарных возбуждений хорошо известны и описываются с точки зрения модели жидкости Латтинджера. Кроме того, в этой модели предсказывается делокализационный переход по силе взаимодействия [9], описанный в разделе (1.5); согласно предсказанию, имеется область параметров $1/2 < \Delta < 1$, где, несмотря на наличие беспорядка, элементарные возбуждения по-прежнему делокализованы.

Исследование транспортных свойств системы — а именно, спиновая проводимость, как отклик спинового тока на приложенный градиент магнитного поля (что на фермионном языке (1.4) соответствует обычной проводимости), и теплопроводность, как отклик теплового тока на градиент температуры — прямолинейный способ исследовать эффекты от многочастичной локализации. В данной работе будут исследованы эффекты от “остаточного” беспорядка в “делокализованной” области параметров $1/2 < \Delta < 1$, где транспортные свойства наиболее интересны.

Модель жидкости Латтинджера, описывающая возбуждения исследуемой системы, существенно опирается на процедуру линеаризации спектра возбуждений. Стандартная теория возмущений, которую можно строить для учёта нелинейности спектра, существенно сингулярна [7]; в частности, мнимая часть собственной энергетической части, отвечающая за затухание квазичастиц, оказывается сингулярной на массовой поверхности. Непертурбативный учёт совместных эффектов от взаимодействия и нелинейности спектра, в свою очередь, приводит к интересным феноменам, обзор которых можно найти в работе [6]. В частности, известно поведение динамического структурного фактора при низких температурах (в пределе $T = 0$), в котором проявляются степенные сингулярности вблизи краёв спектра возбуждений. В этой работе будет разработан самосогласованный подход, позволяющий учесть наиболее сингулярные вклады от нелинейности спектра в динамический структурный фактор и в время жиз-

ни квазичастиц при достаточно высоких температурах — больших, чем энергия возбуждений $T \gg \omega$.

1.3 Свойства чистой системы

В этом разделе мы обсудим свойства системы, описываемой гамильтонианом (1.1), в «чистом» случае — то есть в отсутствии беспорядка ($h_n \equiv 0$).

1.3.1 XY-модель

Особый интерес представляет так называемая XY-модель, соответствующая точке $\Delta = 0$. Это связано с тем, что она эквивалентна модели невзаимодействующих фермионов, и поэтому допускает тривиальное решение с помощью преобразования Фурье:

$$\hat{\psi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{\psi}_n e^{-ik \cdot na}, \quad \hat{\psi}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{\psi}_k e^{ik \cdot na}, \quad (1.5)$$

приводя к гамильтониану $\hat{H} = \sum_k \xi(k) \hat{\psi}_k^\dagger \hat{\psi}_k$, с законом дисперсии $\xi(k) = -J \cos ka - h$ (тут a — постоянная решётки). Волновой вектор k пробегает значения из первой зоны Бриллюэна $|k| < \pi/a$ с шагом $2\pi/L$ ($L = Na$ — длина системы).

Импульс Ферми, соответствующий нулям закона дисперсии, определяемый из соотношения $k_F a = \pi - \arccos(h/J) \approx \pi/2 + h/J$, задаёт границу заполненных состояний — состояния при $|k| < k_F$ заняты, остальные — свободны. Низкоэнергетические свойства системы определяются окрестностью двух Ферми-точек; возбуждения вблизи точки $-k_F$ называются «левыми» электронами, а вблизи $+k_F$ — «правыми». В ведущем приближении эти частицы задаются линейным законом дисперсии; если ввести импульс $p = k \mp k_F$ (тут и дальше верхний знак соответствует импульсу «правых», а нижний — «левых» фермионов), то закон дисперсии можно записать как $\xi(p) \approx \pm v_F p$, где $v_F = a\sqrt{J^2 - h^2} \approx Ja - ah^2/2J$ — скорость Ферми, групповая скорость этих возбуждений.

Важной особенностью системы в отсутствии магнитного поля $h = 0$ является наличие в ней симметрии, соответствующей отражению относительно плоскости XY; эквивалентно, это соответствует симметрии «частица-дырка» на языке фермионов. В терминах закона дисперсии это означает, что разложение

$\xi(p)$ может происходить только по нечётным степеням p , и следующая поправка имеет вид $\delta\xi(p) = -\frac{1}{6}J(pa)^3$. Наличие слабого магнитного поля эту симметрию нарушает, и разложение происходит по всем степеням p . В частности, следующий порядок имеет вид $\delta\xi(p) = -\frac{1}{2}h(pa)^2$ (что соответствует «массивным» возбуждениям $\delta\xi(p) = \frac{p^2}{2m}$ с «массой» $m = 1/ha^2$).

Тем самым, основным эффектом от слабого магнитного поля в рассматриваемой модели — это нарушение обсуждаемой симметрии, и, как следствие, изменение характера нелинейности спектра. Это же рассуждение верно и для общего случая при наличии взаимодействия.

1.3.2 XXZ-модель

Давайте теперь перейдём к рассмотрению общего случая с произвольным значением параметром анизотропии $\Delta \neq 0$. В этом случае система (1.1) является интегрируемой и допускает точное решение при помощи анзаца Бете, подробности которого можно найти в литературе [1, chapter 5]. Исследование свойств элементарных возбуждений приводит к фазовой диаграмме, изображённой на рисунке 1.1.

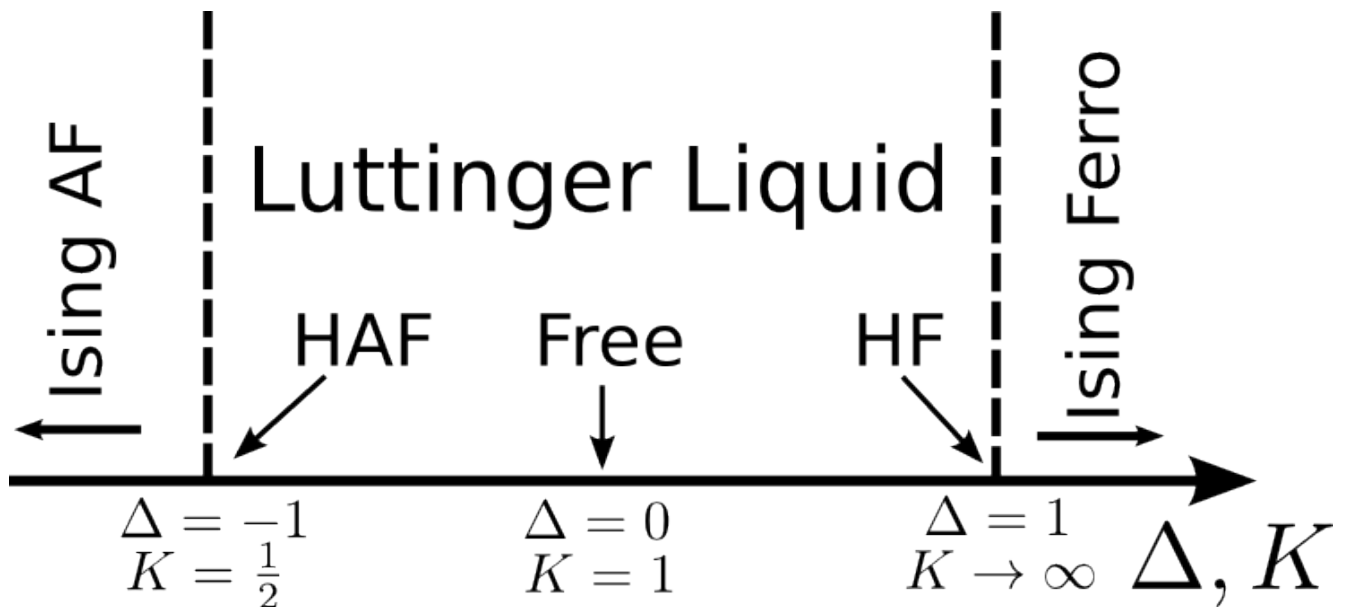


Рис. 1.1: Фазовая диаграмма для чистой системы XXZ. Подробности диаграммы описаны в тексте.

Поясним подробнее обозначения на этой фазовой диаграмме. Точка $\Delta = 0$ («Free») соответствует модели свободных фермионов, свойства которой были

обсуждены выше в разделе (1.3.1). Точка $\Delta = 1$ соответствует Гейзенберговскому ферромагнетику (Heisenberg Ferromagnet, «HF»), у которого имеется полная вращательная симметрия $SU(2)$ в спиновом пространстве (так называемая изотропная точка). В отсутствие магнитного поля, спектр элементарных возбуждений квадратичен $\epsilon(k) = \frac{k^2}{2m}$; магнитное поле же приводит к появлению щели в спектре. При $\Delta > 1$, основное состояние соответствует Изинговскому ферромагнитному упорядочению («Ising Ferro»; все спины поляризованы вдоль оси z), а в спектре элементарных возбуждений даже в отсутствие магнитного поля имеется щель.

Точка $\Delta = -1$, в свою очередь, соответствует Гейзенберговскому антиферромагнетику (Heisenberg Antiferromagnet, «HAF»). Спектр элементарных возбуждений там всё ещё линейный, однако при $\Delta < -1$ основное состояние соответствует Неелевскому упорядочению («Ising AF»; чередующиеся намагниченности разных знаков), и в спектре элементарных возбуждений также имеется щель.

Область $-1 < \Delta < 1$ наиболее интересна с точки зрения низкоэнергетической физики, поскольку в спектре возбуждений щели нет, а закон дисперсии в первом приближении линейный. Возбуждения в такой системе представляют собой флуктуации фермионной плотности, и сами являются бозонами; модель, описывающая их, называется жидкостью Латтинджера («Luttinger Liquid»); сама модель будет сформулирована ниже. Два основных параметра модели жидкости Латтинджера — это так называемый «параметр Латтинджера» K , и групповая скорость возбуждений u , значения которых известны из точного решения [1], и определяются из следующих уравнений:

$$\Delta = \cos \frac{\pi}{2K}, \quad u = \frac{1}{2}Ja \frac{\sin(\pi/2K)}{1 - 1/2K} \quad (1.6)$$

Несложно видеть, что в «свободной» точке $\Delta = 0$, значение $K = 1$ и величина скорости совпадает с полученной выше; ферромагнитная изотропная точка соответствует $K \rightarrow \infty$, а антиферромагнитная — $K = 1/2$.

1.4 Жидкость Латтинджера

1.4.1 Историческое введение

Эффекты от взаимодействия в фермионных системах в старших размерностях (то есть $d \geq 2$) хорошо изучены и описываются теорией Ферми-жидкости [2]. Основное состояние в таких системах, так же как и в невзаимодействующей теории, описывается заполненной Ферми-сферой, которая «размывается» при ненулевых температурах; в целом, учёт взаимодействия приводит к незначительным перенормировкам спектра (замена массы электрона m на эффективную массу $m^* = p_F/v_F$), а также появлению конечного времени жизни квазичастиц, которое расходится вблизи Ферми-поверхности (например, в размерности $d = 3$ оно ведёт себя как $1/\tau_{el} \sim \epsilon^2/\epsilon_F$). Как следствие, такие квазичастичные возбуждения хорошо определены (их время затухания велико), и эффекты взаимодействия в таких системах являются пертурбативными, то есть их можно учитывать с помощью теории возмущений.

В размерности $d = 1$ картина радикально меняется. Теория возмущений, построенная по взаимодействию, является сингулярной; в частности, затухание фермионных квазичастиц оказывается $1/\tau_{el} \sim \epsilon$ и такие возбуждения являются короткоживущими. Теория Ферми-жидкости для одномерных систем оказывается неприменима.

Модель взаимодействующих одномерных фермионов была решена в работе [3]. Было замечено, что если рассматривать электрон-дырочные возбуждения $\hat{\rho}_q^\dagger = \sum_k \hat{\psi}_{k+q}^\dagger \hat{\psi}_k$ (см. рис. 1.2), заменив фермионный спектр линейным, то такие возбуждения являются хорошо определёнными (имеют хорошо определённый импульс q и энергию $E = v_F q$). Такие возбуждения представляют собой флуктуации фермионной плотности, а сами уже являются бозонами. Парное взаимодействие на этом языке записывается естественным образом и входит в квадратичную часть действия в терминах новых, бозонных, квазичастиц.

В работе [4] были даны физические интерпретации полученных результатов, а также разработана общая теория, применимая для широкого класса одномерных систем со взаимодействием, которая и получила название модели «жидкости Латтинджера» (Luttinger Liquid). В ней были построены операторные тождества, показывающие, как связать фермионные операторы рождения и

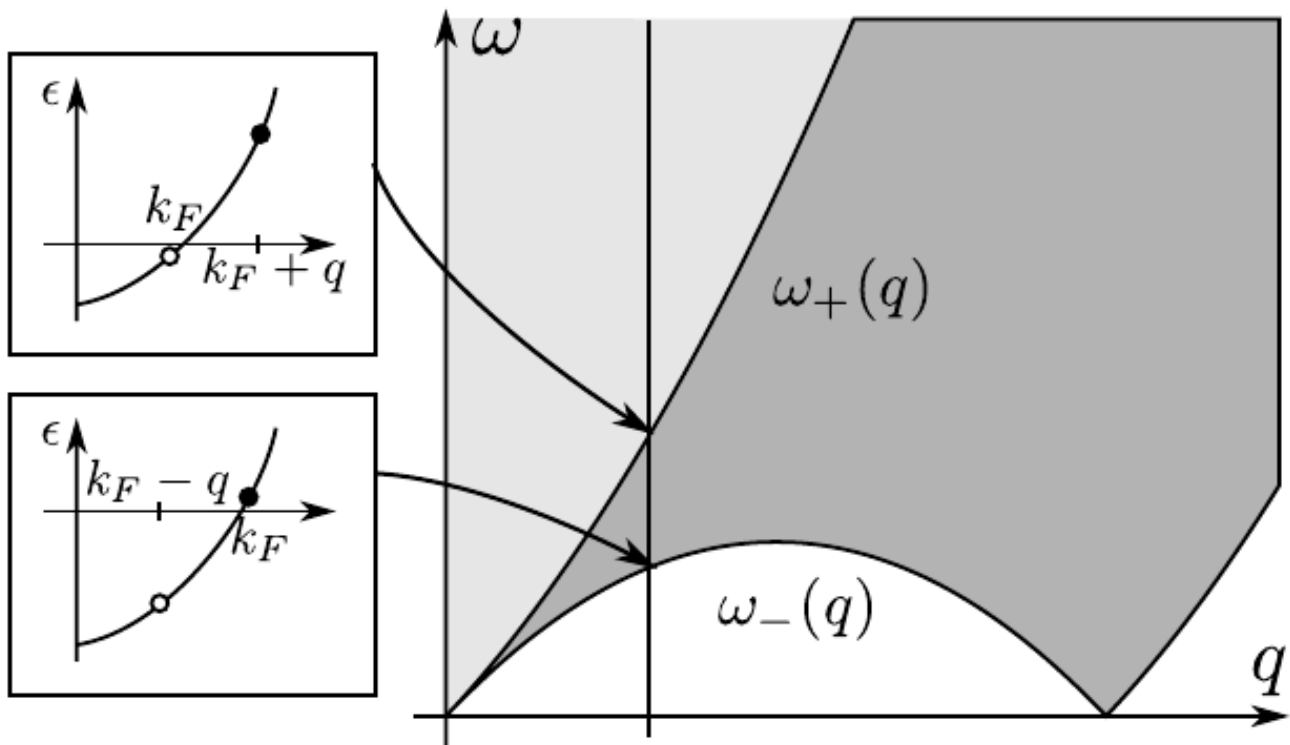


Рис. 1.2: Энергия электрон-дырочных возбуждений

уничтожения с бозонными операторами флуктуации плотности (носящие название “бозонизации”), а также была доказана эквивалентность соответствующих Гильбертовых пространств.

1.4.2 Бозонизация

Наибольший интерес для представляют низкоэнергетические и длинноволновые свойства системы, для описания которых удобно перейти от решёточной модели (1.4) к теоретико-полевому описанию, соответствующему непрерывному пределу (формально такой предел соответствует $a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ так что $L = Na = \text{const}$). При этом “решёточные” операторы $\hat{\psi}_n$ заменяются на “полевые” операторы $\psi(x = na) = \frac{1}{\sqrt{a}}\hat{\psi}_n$.

На примере “чистой” модели (раздел (1.3.1)) было показано, что наибольший интерес представляют окрестности Ферми-точек $\pm k_F$. Поэтому удобно выделить эти окрестности явно, согласно $\psi(x) = \psi_R(x)e^{ik_F x} + \psi_L(x)e^{-ik_F x}$; поля ψ_R и ψ_L уже являются “медленными”, и соответствуют “правым” и “левым” фермионам.

Основное бозонизационное тождество позволяет переписать фермионные

поля через бозонные согласно $\psi_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-i\phi_\eta(x)}$ ($\eta = R, L$; а параметр a выступает в роли ультрафиолетовой обрезки). Оказывается, что при таком определении поля $\phi_\eta(x)$ действительно связаны с флуктуациями фермионной плотности $\rho_\eta(x) = \psi_\eta^\dagger(x)\psi_\eta(x)$ согласно $\rho_\eta(x) = \mp \frac{1}{2\pi} \nabla \phi_\eta(x)$ (верхний знак соответствует $\eta = R$, а нижний — $\eta = L$).

Линейные комбинации полей ϕ_η являются дуальными полями:

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2}(\phi_R(x) - \phi_L(x)), \\ \theta(x) = \frac{1}{2}(\phi_R(x) + \phi_L(x)), \end{cases} \quad (1.7)$$

поскольку их коммутационные соотношения записываются согласно $[\phi(x), \theta(y)] = -i\pi \text{sign}(x - y)$; а значит поле $\Pi(x) = \frac{1}{\pi} \nabla \theta(x)$ является канонически сопряжённым полю $\phi(x)$.

При этом полная фермионная плотность $\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$, помимо “медленных” плотностей $\rho_R(x)$ и $\rho_L(x)$, как несложно видеть, включает в себя также и “быструю” компоненту с Фурье-гармониками вблизи $2k_F$:

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \nabla \phi + \frac{1}{2\pi a} (e^{-2i\phi + 2ik_F x} + h.c.) \quad (1.8)$$

1.4.3 Линейное приближение

Как было пояснено выше, в приближении линейного спектра фермионов, бозонные возбуждения хорошо определены. В результате, в этом приближении Гамильтониан (1.4) (пока что — в отсутствии беспорядка и магнитного поля) превращается в гамильтониан свободных бозонов, представляющий собой гамильтониан Латтинджера:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\pi} \int dx \left(\frac{u}{K} (\nabla \phi)^2 + uK (\pi \Pi)^2 \right) \quad (1.9)$$

Групповая скорость плазмонов (бозонов — возбуждений фермионной плотности) u , входящая сюда, вообще говоря, отличается от “затравочной” групповой скорости фермионов v_F . В общем случае извлечь её, а также значение так называемого параметра Латтинджера K , оказывается довольно затруднительно. Однако для исследуемой в данной работе модели (1.1) имеется точное решение с помощью анзаца Бете (свойства которого были обсуждены выше в разделе

(1.3.2)), из которого оказывается возможным извлечь точные значения этих параметров. Они даются формулами (1.6).

Как было сказано выше, беспорядок в виде случайных магнитных полей h_n выступает в роли случайного потенциала для фермионов, в конечном итоге приводя к гамильтониану $\hat{H}_{dis} = \int dx \rho(x)V(x)$, и $V(x = na) \equiv h_n$. Поскольку, согласно формуле (1.8), у фермионной плотности имеются Фурье-гармоники вблизи нуля и $2k_F$, то в гамильтониан также имеется два вклада от случайного потенциала:

$$\hat{H}_{dis} = \int dx \left(-\frac{1}{\pi} \nabla \phi(x) \eta(x) + \frac{1}{2\pi a} (\xi^*(x) e^{2i\phi(x)} + h.c.) \right), \quad (1.10)$$

соответствующих вкладу от Фурье-гармоник потенциала вблизи нуля (поле $\eta(x)$) и вблизи $2k_F$ (поля $\xi(x)$ и $\xi^*(x)$; в общем случае, они комплексны).

Обсудим теперь статистические свойства нашего случайного потенциала. В силу независимости случайных полей на узлах, он является δ -коррелированным, причём $\langle V(x)V(y) \rangle = D\delta(x-y)$ с $D = \langle h^2 \rangle a$. Как следствие, такой же коррелятор и у “медленных” компонент $\langle \eta(x)\eta(y) \rangle = \langle \xi(x)\xi^*(y) \rangle = D\delta(x-y)$ (однако тут эту δ -функцию уже стоит понимать в “уширенном” смысле, поскольку в ней присутствуют только достаточно низкие Фурье-гармоники — во всяком случае, не больше $2k_F$). Наконец, наличие однородного магнитного поля соответствует просто замене $\eta(x) \mapsto (h + \eta(x))$ в гамильтониане (1.10).

У полученных двух членов в гамильтониане (1.10) имеется явный прозрачный физический смысл. Первый член соответствует передаче небольшого импульса от случайного потенциала, и поэтому он отвечает за процессы рассеяния вперёд; в то время как второй член отвечает передаче импульсов вблизи $2k_F$ и соответствует рассеянию назад.

Рассеяние вперёд (а также наличие однородного магнитного поля) не приводит ни к каким интересным физическим результатам, и, на самом деле, может быть убрано тривиальным “фазовым сдвигом”:

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \frac{K}{u} \int^x \eta(y) dy \quad (1.11)$$

Такой фазовый сдвиг сохраняет коммутационные соотношения, но убирает зависимость гамильтониана от $\eta(x)$.

1.4.4 Процессы переброса

Описанное в предыдущем разделе верно только в приближении линейного спектра и в непрерывном пределе. Наличие решётки в исходной модели приводит к возможности так называемых “процессов переброса” (umklapp processes). Это, в свою очередь, приводит к добавочному нелинейному члену в гамильтониане:

$$\hat{H}_U = \lambda \frac{u}{a^2} \int dx \cos(4\phi(x)) \quad (1.12)$$

с значением параметра λ также известным из точного решения [5]:

$$\lambda = \frac{4\Gamma(2K)}{\Gamma(1-2K)} \left[\frac{\Gamma(\frac{4K-1}{4K-2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3K-1}{2K-1})} \right]^{4K-2} \quad (1.13)$$

Эффект от этого члена можно учесть с помощью метода ренормгруппы [1, appendix E]. Масштабная размерность этого члена равна $2 - 4K$; тем самым в области параметров $K > 1/2$ (то есть $-1 < \Delta < 1$ — как раз там, где применимо описание на языке жидкости Латтинджера) этот оператор иррелевантен в смысле ренормгруппы. В точке $K = 1/2$ он становится маргинальным; его аккуратный учёт показывает, что в фермионной системе происходит переход Мотта, и при $K < 1/2$ в спектре возбуждений открывается щель. Это хорошо согласуется с тем, что было описано выше в разделе (1.3.2), поскольку на языке спиновой задачи эта же точка ($K = 1/2, \Delta = -1$) соответствует Гейзенберговскому антиферромагнетику; при дальнейшем уменьшении K и Δ в системе происходит Неелевское упорядочение.

При ненулевой температуре эффект от этого иррелевантного оператора будет конечным. Соответствующее вычисление по теории возмущений было проведено в работе [8] (обозначения в статье отличаются от обозначений, используемых в этой работе; ответ же записан через наши обозначения), где было показано, что это приводит к конечному затуханию квазичастиц:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi^3 K \Gamma^2(2K)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + 2K)} \lambda^2 \frac{u}{a} \left(\frac{\pi a T}{u} \right)^{8K-3} \propto J \left(\frac{T}{J} \right)^{8K-3} \quad (1.14)$$

В области параметров $K > 1/2$ оно является малым; причём тем меньше, чем больше K .

1.4.5 Эффекты от нелинейности спектра

Динамический структурный фактор, определяется как фурье-компонента от коррелятора плотность-плотность:

$$S(q, \omega) = \int dt dx e^{i\omega t - ikx} \langle \rho(x, t) \rho(0, 0) \rangle. \quad (1.15)$$

(где под $\langle \dots \rangle$ подразумевается усреднение по Гиббсовскому ансамблю при температуре T), показывает спектр возбуждений фермионной плотности в системе. В частности, в линейном приближении он пропорционален $S(q, \omega) \propto |q| \delta(\omega - u|q|)$ при любой температуре.

Нелинейность спектра, в свою очередь, приводит к тому, что эта δ -функция “размывается” между $\omega_+(q) = \xi(k_F + q) - \xi(k_F)$ и $\omega_-(q) = \xi(k_F) - \xi(k_F - q)$ (см. рис. 1.2). Для свободных фермионов при нуле температур она просто принимает вид “ступеньки”:

$$S(q, \omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \theta(\omega_+ - \omega) \theta(\omega - \omega_-), \quad \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- \quad (1.16)$$

Наличие взаимодействия модифицирует эту картинку; а именно, взаимодействие приводит к тому, что вблизи $\omega = \omega_{\pm}$ возникают степенные расходимости. Подробно это описано в обзоре [6].

Уширение структурного фактора в частности означает, что плазмоны уже не являются свободными возбуждениями, и между ними появляется взаимодействие. Соответствующий гамильтониан бозонных полей был выведен в работе [5]. Для удобства записи этого гамильтониана и дальнейших вычислений, мы введём перенормированные плотности “левых” и “правых” фермионов, определяемых согласно соотношениям:

$$\begin{cases} R(x) &= \frac{1}{\sqrt{K}} \rho_R(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{K}} \partial_x \phi + \frac{\sqrt{K}}{2} \Pi \\ L(x) &= \frac{1}{\sqrt{K}} \rho_L(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{K}} \partial_x \phi - \frac{\sqrt{K}}{2} \Pi \end{cases} \quad (1.17)$$

Сама же поправка к гамильтониану записывается в следующем виде:

$$\hat{H}_{b.c.}^{(4)} = -\frac{\alpha}{2} \int dx (\lambda_+ R^2 L^2 + \lambda_- (R^4 + L^4)) \quad (1.18)$$

с константой $\alpha = 4\pi^3 u a^2$, а также безразмерными параметрами:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \tan \frac{\pi K}{2K - 1}, \quad (1.19)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{24\pi K} \frac{\Gamma\left(\frac{3K}{2K-1}\right) \Gamma^3\left(\frac{1}{4K-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4K-2}\right) \Gamma^3\left(\frac{K}{2K-1}\right)}. \quad (1.20)$$

С точки зрения ренормгруппы, эти операторы имеют масштабную размерность -2 , и тем самым они всегда иррелевантны. Однако при $K > 1$, их масштабная размерность становится больше чем размерность оператора (1.12), а значит, они “важнее” при ненулевых температурах.

Наличие нелинейных членов в гамильтониане приводит к тому, что фазовый сдвиг (1.11) уже не точно убирает из гамильтониана зависимость от рассеяния вперёд и однородного магнитного поля, а убирает только из квадратичной его части. В частности, в отсутствие беспорядка но при наличии однородного магнитного поля этот фазовый сдвиг “генерирует” также и тройные вершины взаимодействия:

$$\hat{H}_{b.c.}^{(3)} = \int dx \left(\frac{\alpha_1}{3} (R^3 + L^3) + \frac{\alpha_2}{2} (R^2 L + L^2 R) \right) \quad (1.21)$$

со следующими значениями констант:

$$\alpha_1 = \frac{3\alpha\sqrt{K}\lambda_- h}{\pi u}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha\sqrt{K}\lambda_+ h}{\pi u} \quad (1.22)$$

Симметрия “частица-дырка”, которая обсуждалась выше в разделе (1.3.1), соответствует симметрии относительно замены $R \mapsto -R$ и $L \mapsto -L$. В отсутствие внешнего магнитного поля эта симметрия имеет место, поэтому в гамильтониане могут присутствовать только чётные вершины; с этим и связано то, что в гамильтониан (1.18) входят лишь четверные вершины. С другой стороны, включение слабого магнитного поля эту симметрию нарушает, и в связи с этим появляются ранее запрещённые этой симметрией члены общего вида — то есть кубические (1.21).

1.4.6 Роль интегрируемости модели

Как было сказано в разделе (1.3.2), XXZ-модель (в отсутствие беспорядка) является интегрируемой системой. В частности это означает, что в ней имеется бесконечное количество различных интегралов движения (сохраняющихся величин). Одной из таких величин является ток энергии $\hat{J}^{(E)} = \sum_n \hat{j}_n^{(E)}$, выражение для которого будет выведено ниже, в разделе (3.2) и даётся формулой

(3.8). Спиновый же ток $\hat{J}^{(s)} = \sum_n \hat{j}_n^{(s)}$, плотность которого входит в уравнение непрерывности $\partial_t \hat{S}_n^z + (\hat{j}_{n+1}^{(s)} - \hat{j}_n^{(s)}) = 0$, выражение для которого даётся формулой (3.6), сохраняется только в XY-модели (то есть в отсутствии магнитного поля и анизотропии $\Delta = 0$).

Сохранение тока энергии означает, что коэффициент теплопроводности, входящий в закон Фурье $j_E(x) = -\kappa \nabla T$, будет бесконечным. При ненулевом магнитном поле, между спиновым током и током энергии имеется ненулевое “перекрывание” $\langle \hat{J}_s \hat{J}_E \rangle$, что в свою очередь значит, что спиновая проводимость при ненулевом магнитном поле тоже должна быть бесконечной. С другой стороны, полученный в работе [8] ответ для времени жизни квазичастиц (формула (1.14)) приводит к конечной спиновой проводимости $\sigma = uK\tau/\pi$, в том числе и для ненулевого магнитного поля.

Полученный парадокс был рассмотрен в той же [8], где был получен ответ для времени жизни квазичастиц (1.14). В ней было высказано предположение, подкреплённое вычислением спиновой проводимости с помощью другого метода (memory function formalism), что эта самая проводимость всё-таки должна быть бесконечной. Получаемый же конечный ответ в наинизшем порядке теории возмущений, по-видимому, не является правильным, а полный учёт ряда теории возмущений должен восстановить конечность ответа. Статус этого предположения пока что неясен.

Отдельно стоит отметить, что в линейном приближении жидкость Латтинджера (1.9), является тривиально интегрируемой, поскольку это — свободная теория. В частности, в ней сохраняется как спиновый ток $j_s(x) = \frac{1}{\pi} \int dx \partial_t \phi$, так и ток энергии $j_E(x) = -\frac{u}{\pi K} \int dx \partial_t \phi \nabla \phi$. С другой стороны, возмущения вида (1.12) эту интегрируемость в непрерывном пределе уже нарушают; это связано с тем, что написанный член является лишь первым в бесконечном ряде иррелевантных возмущений. Учёт этого бесконечного ряда, вообще говоря, должен привести к сохранению нужных токов.

1.5 Фазовая диаграмма для неупорядоченной системы

В разделе (1.4) было сформулировано эффективное низкоэнергетическое описание исходной системы с помощью бозонной теории поля, носящей название жидкости Латтинджера. В частности, в линейном приближении гамильтониан задачи состоит из членов (1.9) и (1.10). Такая модель была исследована в работе [9], где были выведены ренормгрупповые уравнения для безразмерного параметра беспорядка, вводимого следующим образом:

$$g = \frac{2Da}{\pi u^2}. \quad (1.23)$$

Напомним, что параметр $D = \langle h^2 \rangle a$ связан с коррелятором “быстрой” компоненты случайного потенциала через $\langle \xi(x)\xi^*(y) \rangle = D\delta(x - y)$; тем самым, безразмерный параметр g пропорционален ширине распределения случайных полей $\gamma \equiv \langle h^2 \rangle / J^2$, и коэффициент пропорциональности является функцией параметра Латтинджера K . Для параметра g , а также параметров модели Латтинджера u и K выводились следующие ренормгрупповые уравнения (тут $\xi = \ln \frac{\tilde{a}}{a}$ — параметр масштаба, и \tilde{a} — ультрафиолетовая обрезка, изменяя которую и строится процедура ренормгруппы):

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} &= -\frac{uK}{2}g \\ \frac{dK}{d\xi} &= -\frac{K^2}{2}g \\ \frac{dg}{d\xi} &= (3 - 2K)g \end{cases} \quad (1.24)$$

Из этих уравнений, в частности, следует наличие квантовой критической точки $K = 3/2$ (что соответствует $\Delta = 1/2$), при бесконечно малом беспорядке. При $K < 3/2$, эффекты от беспорядка усиливаются на крупных масштабах, и система быстро выходит из пертурбативного режима. Эту область параметров мы будем называть “локализованной” областью; хотя стоит обратить внимание, что уравнения (1.24) никак не связаны с эффектом локализации Андерсона, поскольку никак не учитывает эффекты от многократного рассеяния на примесях, что было замечено в работах [10, 11]. Область же параметров, где беспорядок перенормируется к нулю, мы будем называть “делокализованной” областью, поскольку в ней эффекты от беспорядка заведомо слабые и пертурбативные.

Фазовая диаграмма, которая следует из уравнений (1.24), была исследована в работе [12], и изображена жирной линией на рисунке 1.3. Помимо этого, на рисунке приведены фазовые диаграммы, полученные при помощи численных методов в работе [13] (изображена на рисунке пунктиром), где исследовался отклик энергии основного состояния на изменение граничных условий, и в работе [14] (изображена на рисунке точечным пунктиром), где исследовалось поведение корреляционных функций $\langle S_n^z S_0^z \rangle$.

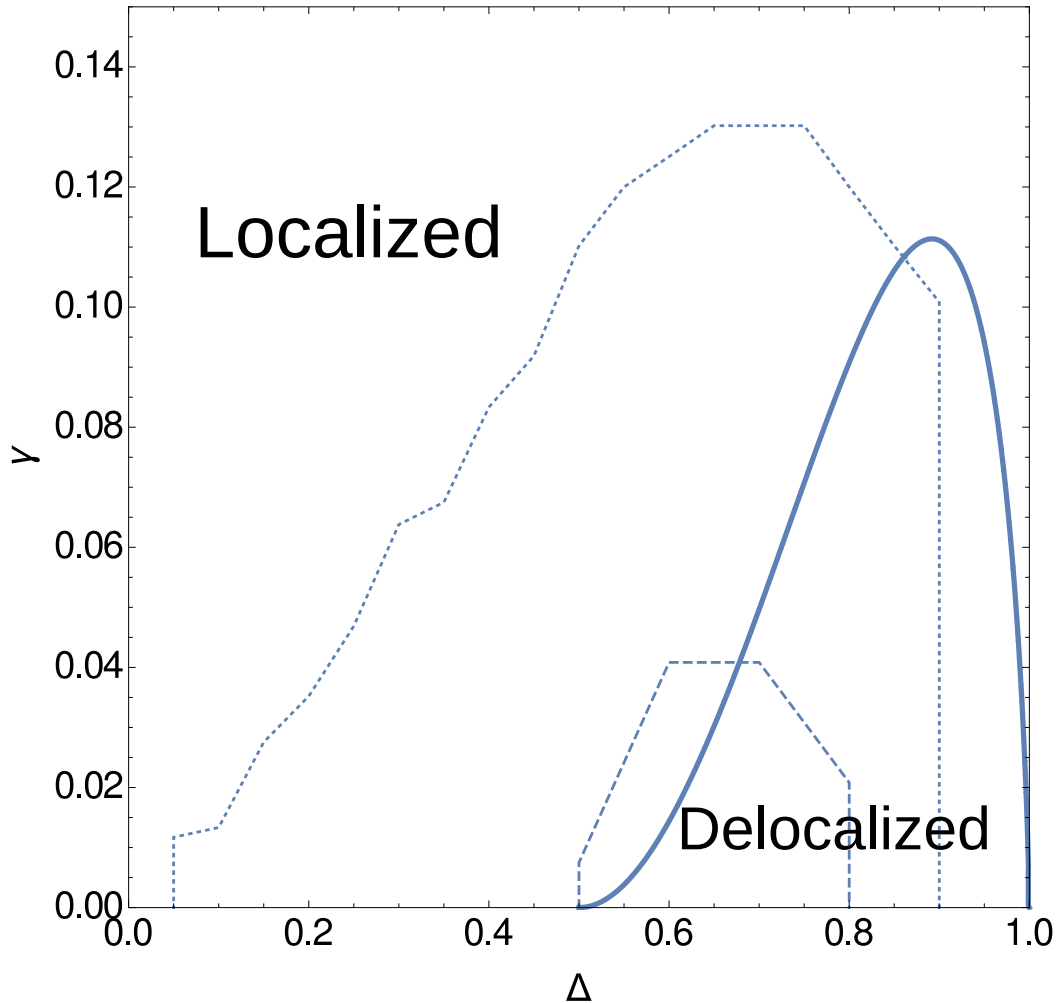


Рис. 1.3: Фазовая диаграмма для неупорядоченной спиновой цепочки с XXZ -обменом. Подробности в тексте

Сразу бросаются в глаза существенные характеристики полученных диаграмм. Диаграмма из работы [13] “стартует” из предсказанной теоретическим расчётом точки $\Delta = 1/2$, однако полученная делокализованная область существенно более узкая, заканчиваясь вместо изотропной точки $\Delta = 1$, предсказываемой решением ренормгрупповых уравнений (1.24), на точке $\Delta = 0.8$. Кроме

того, она существенно ниже. С другой стороны, хоть высота делокализованной области, полученная в работе [14], сравнима с предсказываемой теоретически, ширина этой области существенно больше — она простирается вплоть до невзаимодействующей точки $\Delta = 0$. Впрочем, стоит отметить, что эксперименты проводились на системах небольших размеров (порядка 20 узлов в работе [13], и порядка 1000 узлов в работе [14]), меньше или сравнимых с локализационной длиной задачи, поэтому достоверность численно полученных фазовых диаграмм, вообще говоря, находится под вопросом.

Сама длина локализации может быть оценена как масштаб, на котором значения параметра g становятся порядка 1, и система выходит из пертурбативного режима; такая оценка даёт:

$$L_{loc} = c(K)\gamma^{1/(2K-3)} \quad (1.25)$$

(тут $c(K)$ — неуниверсальная константа порядка единицы). Следует отметить, что локализация в точках $\Delta = 0$ и $\Delta = 1$ следует непосредственно из явления локализации Андерсона, поскольку первая точка соответствует свободной фермионной теории (с линейным законом дисперсии), а во второй точке одночастичные возбуждения являются свободными магнонами (с квадратичным законом дисперсии).

1.6 Диаграммная техника Келдыша

В этой работе для совместного учёта эффектов от беспорядка и ненулевой температуры, мы будем пользоваться диаграммной техникой Келдыша, обзор которой приведён в [15]. Келдышев временной контур C вводится стандартным образом, “верхняя” (“+”) его часть идёт по времени от минус бесконечности до плюс бесконечности, а “нижняя” (“-”) — обратно. Операция контурного упорядочения для бозонных полей, находящихся на этом контуре, определяется

стандартным образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_C\{A_+(t_1)B_+(t_2)\} = T\{A(t_1)B(t_2)\} = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases} \\ T_C\{A_+(t_1)B_-(t_2)\} = B(t_2)A(t_1) \\ T_C\{A_-(t_1)B_+(t_2)\} = A(t_1)B(t_2) \\ T_C\{A_-(t_1)B_-(t_2)\} = \tilde{T}\{A(t_1)B(t_2)\} = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 < t_2 \\ B(t_2)A(t_1), & t_1 > t_2 \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

(индекс “+” у поля означает, что оно находится на “верхнем” контуре, а “-” — на нижнем; знак $T\{A(t_1)B(t_2)\}$ означает стандартное временное упорядочение, а знак $\tilde{T}\{A(t_1)B(t_2)\}$ — временное анти-упорядочение).

Келдышевская функция Грина двух произвольных полей определяется согласно $iG_{ab}(t_1, t_2) = \langle T_C \hat{A}_a(t_1) \hat{B}_b(t_2) \rangle$ (в данном случае $\langle \dots \rangle$ означает усреднение с матрицей плотности Гиббсовского ансамбля $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}$, $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$), и при этом представляет собой матрицу 2 на 2 в Келдышевом пространстве (что соответствует $a, b = \pm$):

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_{++} & G_{+-} \\ G_{-+} & G_{--} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} G_c & G_{<} \\ G_{>} & G_{\bar{c}} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

(слева направо, сверху вниз — соответственно, “фейнмановская”, “меньшая”, “большая” и “анти-фейнмановская” функции Грина). Эти функции Грина не являются независимыми, а именно, между ними имеется соотношение $G_c + G_{\bar{c}} = G_{<} + G_{>}$; чтобы учесть это соотношение, вводится так называемый “келдышев поворот”; он заключается в переходе к “классическим” и “квантовым” операторам, и рассмотрению функций Грина для них:

$$\begin{cases} A_{cl} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ + A_-) \\ A_q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+ - A_-) \end{cases} \quad (1.28)$$

В таком случае Келдышевские функции Грина записываются следующим об-

разом:

$$\begin{cases} \langle T_C A_{cl}(t_1) B_q(t_2) \rangle &= \theta(t_1 - t_2) \langle [A(t_1), B(t_2)] \rangle \equiv iG_{ret}(t_1, t_2) \\ \langle T_C A_q(t_1) B_{cl}(t_2) \rangle &= -\theta(t_2 - t_1) \langle [A(t_1), B(t_2)] \rangle \equiv iG_{adv}(t_1, t_2) \\ \langle T_C A_{cl}(t_1) B_{cl}(t_2) \rangle &= \langle \{A(t_1), B(t_2)\} \rangle \equiv iG_K(t_1, t_2) \\ \langle T_C A_q(t_1) B_q(t_2) \rangle &\equiv 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

и в матричном виде:

$$\hat{G} = -i \langle A_a B_b \rangle = \begin{pmatrix} G_K & G_{ret} \\ G_{adv} & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \{cl, q\} \quad (1.30)$$

(соответственно — запаздывающая, опережающая и Келдышева компоненты). Это представление будет использовано в главе 2.

Отметим, что иногда более удобным для работы является альтернативное представление:

$$\begin{cases} A_{cl} = \frac{1}{2}(A_+ + A_-) \\ A_q = A_+ - A_- \end{cases} \quad (1.31)$$

в котором функция Грина имеет вид

$$\hat{G} = -i \langle A_a B_b \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G_K & G_{ret} \\ G_{adv} & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \{cl, q\} \quad (1.32)$$

Это представление позволяет избежать большого количества факторов $\sqrt{2}$ в действии и вычислениях. В частности, в главе 3 мы будем пользоваться именно этим представлением.

При условии усреднения по температурному распределению (а именно такое и подразумевается), и отсутствии явной зависимости гамильтониана от времени, имеется также так называемое “равновесное” соотношение между функциями Грина: $G_{<}(\omega) = e^{-\beta\omega} G_{>}(\omega)$. В свою очередь это приводит к выражению для равновесной Келдышевской компоненты:

$$G_K(\omega) = f(\omega)(G_{ret}(\omega) - G_{adv}(\omega)) = f(\omega)2i \operatorname{Im} G_{ret}(\omega) \quad (1.33)$$

где введена “бозонная функция распределения” $f(\omega) = \coth \frac{\beta\omega}{2}$. Кроме того, это же соотношение позволяет выразить также и “большую” компоненту функции

Келдышевской функции Грина:

$$G_{>}(\omega) = \frac{2\text{Im}G_{ret}(\omega)}{1 - e^{-\beta\omega}} \quad (1.34)$$

Для построения диаграммной техники полный гамильтониан \hat{H} задачи разбивается на квадратичную часть \hat{H}_0 и возмущение \hat{V} . Используя представление взаимодействия, строится следующее представление для корреляторов:

$$\langle T_C\{\hat{O}_1(t_1)\dots\hat{O}_N(t_N)\} \rangle \equiv \langle T_C\{\hat{O}(t_1)\dots\hat{O}(t_N)\hat{S}_C\} \rangle_0 \quad (1.35)$$

где усреднение $\langle \dots \rangle_0$ производится уже с гамильтонианом \hat{H}_0 , и введён оператор эволюции вдоль всего Келдышевского контура:

$$\hat{S}_C = T_C \left\{ \exp \left(-i \int_C d\tau \hat{V}(\tau) \right) \right\}. \quad (1.36)$$

Стоящее в экспоненте выражение называют iS_K , где S_K — “келдышевское действие”. Для него также имеется выражение:

$$S_K = - \int_{-\infty}^{+\infty} (V_+(t) - V_-(t)) dt \quad (1.37)$$

Наконец, для контурно-упорядоченных средних, взятых по отношению к квадратичному гамильтониану, верна теорема Вика, поэтому дальнейшее построение диаграммной техники — разложение e^{iS_K} , представление ряда теории возмущений в виде диаграмм Фейнмана, экспоненцирование несвязных кусков и составление уравнения Дайсона — происходит стандартным образом. Стоит обратить внимание, что “келдышевская статсумма” в выражении (1.35), которая “нормирует” это выражение, равна $Z = \langle \hat{S}_C \rangle_0 \equiv 1$. Это означает, что “вакуумные” диаграммы сокращаются автоматически; а кроме того, это — основополагающее свойство, позволяющее производить усреднение по беспорядку в самом начале, на уровне действия. Этим приёмом мы воспользуемся в главе 3, где будут рассмотрены транспортные свойства неупорядоченной системы.

Глава 2

Затухание квазичастиц в отсутствии беспорядка

Как было показано в разделе (1.4), учёт нелинейности спектра элементарных возбуждений в модели жидкости Латтинджера генерирует нелинейные члены (1.18), а также члены (1.21) при наличии ненулевого магнитного поля. Нелинейные члены отвечают за уширение спектральной функции, а также приводят к конечному времени жизни бозонных возбуждений, поскольку теория становится взаимодействующей. В этой главе, используя диаграммную технику Келдыша, будут выведены конечные выражения для времени затухания $\Gamma(\omega)$ частиц при высоких температурах (в смысле $T \gg \omega$), при наличии и в отсутствии магнитного поля.

2.1 Пропагаторы

Для построения теории возмущений по нелинейности спектра, мы будем пользоваться полями фермионной плотности, определёнными при помощи формул (1.17). Поскольку мы будем пользоваться диаграммной техникой Келдыша (1.6) при условии термодинамического равновесия, нам достаточно следить за запаздывающими пропагаторами. Для диагонализации свободной теории (1.9), мы воспользуемся преобразованием Фурье (тут и дальше будет использована

короткая нотация $\mathbf{x} = (x, t)$):

$$\begin{cases} R(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k>0} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(\hat{a}_k e^{-i\omega_k t + ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikx} \right) \\ L(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k<0} \sqrt{\frac{|k|}{2\pi}} \left(\hat{a}_k e^{-i\omega_k t + ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikx} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

Определённые таким образом операторы рождения и уничтожения плазмонов диагонализуют гамильтониан $\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ и образуют стандартную бозонную алгебру $[\hat{a}_k, \hat{a}_q^\dagger] = \delta_{kq}$.

Затравочные запаздывающие пропагаторы, вычисленные по отношению к невозмущённому гамильтониану \hat{H}_0 , определяются по следующим выражениям:

$$\begin{cases} G_{ret}^{(R,0)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= -i\theta(t) \langle [R(\mathbf{x}_1), R(\mathbf{x}_2)] \rangle_0 \\ G_{ret}^{(L,0)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &= -i\theta(t) \langle [L(\mathbf{x}_1), L(\mathbf{x}_2)] \rangle_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

и непосредственное вычисление даёт следующие значения для их преобразования Фурье (тут и далее будет использоваться другая короткая нотация для Фурье-компонент $\mathbf{q} = (q, \omega)$):

$$G_{ret}^{(R,0)}(\mathbf{q}) = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega - uq + i0}, \quad G_{ret}^{(L,0)}(\mathbf{q}) = -\frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega + uq + i0}. \quad (2.3)$$

Несложно видеть, что соответствующие им спектральные функции $\text{Im } G_{ret}^{(0)}$ действительно сингулярны и находятся на “массовой поверхности” $\omega = \pm uq$:

$$\text{Im } G_{ret}^{(R/L,0)}(\mathbf{q}) = -\frac{\omega}{2u} \delta(\omega \mp uq) \quad (2.4)$$

(верхний знак соответствует R , а нижний — L). Поскольку в теории есть очевидная симметрия, меняющая “левые” и “правые” фермионы, соответствующая замене $q \mapsto -q$, то в дальнейшем мы будем следить, например, только за “правыми” фермионами.

Для суммирования непроводимых диаграмм мы будем пользоваться стандартным уравнением Дайсона:

$$G_{ret}^{(R/L)} = G_{ret}^{(R/L,0)} + G_{ret}^{(R/L,0)} \Sigma_{ret}^{(R/L)} G_{ret}^{(R/L)}. \quad (2.5)$$

Это уравнение в Фурье-пространстве представляет собой просто алгебраическое уравнение (в силу трансляционной инвариантности всей системы), и его

решение записывается тривиально следующим образом:

$$G_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \pm \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega - uq + i0 \mp \frac{q}{2\pi} \Sigma_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q})} \quad (2.6)$$

Из структуры решения видно, что затухание квазичастиц определяется мнимой частью собственной энергии, согласно формуле:

$$\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \mp \frac{q}{2\pi} \text{Im} \Sigma_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

При этом, как будет показано ниже, затухание ведёт себя сингулярным образом, и тем самым наиболее сильно меняет вид пропагатора. Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать вещественной частью $\text{Re} \Sigma(\mathbf{q})$, которая отвечает за перенормировки спектра и “амплитуды волновой функции” (вычет функции Грина в полюсе); и тем самым, мы будем предполагать следующий вид “одетых” пропагаторов:

$$G_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \pm \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\omega \mp uq + i\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q})} \quad (2.8)$$

Соответствующие такому виду пропагаторов спектральные функции, даваемые следующими формулами:

$$\text{Im} G_{ret}^{(R/L)}(\mathbf{q}) = \mp \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q})}{(\omega \mp uq)^2 + (\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q}))^2}, \quad (2.9)$$

очень похожи на лоренциан шириной $\Gamma^{(R/L)}$ и с центром на массовой поверхности $\omega = \pm uq$; однако стоит особо подчеркнуть, что в силу зависимости величины $\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q})$ и от импульса, и от частоты — явный вид спектральной функции, вообще говоря, может сильно отличаться от лоренциана.

2.2 Низший порядок теории возмущений

В этом разделе будут вычислены поправки к пропагаторам “левых” и “правых” плазмонов в наинизшем порядке теории возмущений по вершинам (1.18) и (1.21). Очевидно, что при достаточно сильном поле h , канал распада, даваемый тройной вершиной, будет доминировать; в дальнейшем мы будем называть этот случай “ненулевое магнитное поле”. Соответственно, режим, когда доминирует канал распада, даваемый вершиной (1.18), мы будем называть случаем “нулевого магнитного поля”. Численный критерий для величины поля h будет выработан пост-фактум, после сравнения полученных ответов.

2.2.1 Действие

Для использования диаграммной техники Келдыша, обозначенной в разделе (1.6), необходимо сперва построить действие, по которому мы будем строить теорию возмущений. Оно даётся формулой (1.37); входящие туда операторы $V(t)$ являются операторами возмущения и даются формулами (1.18) и (1.21). Наконец, необходимо перейти к “классическим” и “квантовым” компонентам полей, которые даются формулой (1.28). Собирая всё вместе, мы приходим к следующему виду “тройной” вершины (при ненулевом магнитном поле):

$$S_K^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int dt dx (\alpha_1 (R_{cl}^2 R_q + \frac{1}{3} R_q^3) + \alpha_2 (L_{cl} R_{cl} R_q + \frac{1}{2} R_{cl}^2 L_q + \frac{1}{2} R_q^2 L_q) + \{R \leftrightarrow L\}) \quad (2.10)$$

Для четверной вершины (случай нулевого магнитного поля) получается следующее выражение:

$$S_K^{(4)} = \alpha \int dt dx \left(\lambda_+ (R_{cl}^3 R_q + R_{cl} R_q^3 + L_{cl}^3 L_q + L_{cl} L_q^3) + \frac{\lambda_-}{2} (R_{cl} L_q + R_q L_{cl})(R_{cl} L_{cl} + R_q L_q) \right) \quad (2.11)$$

Константы связи α , а также $\alpha_{1,2}$, описывающие степень нелинейности спектра, определены в разделе (1.4.5).

На диаграммном языке, линиям будут соответствовать функции Грина, представляющие собой матрицы в Келдышевом пространстве (1.30); а вершины (обозначим их $\gamma_{abc}^{(3R)}$, $\gamma_{abc}^{(R,2L)}$, $\gamma_{abc}^{(2L,R)}$ и $\gamma_{abc}^{(3L)}$ в случае конечного магнитного поля и $\gamma_{abcd}^{(4R)}$, $\gamma_{abcd}^{(2R,2L)}$ и $\gamma_{abcd}^{(4L)}$ в отсутствии магнитного поля) будут иметь симметричную тензорную структуру в этом пространстве, причём ненулевые компоненты следующие:

$$\gamma_{q,q,q}^{(3R)} = \gamma_{cl,q,q}^{(3R)} = -\sqrt{2}\alpha_1, \quad \gamma_{abc}^{(3L)} \equiv \gamma_{abc}^{(3R)}, \quad (2.12)$$

$$\gamma_{q,q,q}^{(2R,L)} = \gamma_{cl,q,q}^{(2R,L)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2, \quad \gamma_{abc}^{(R,2L)} \equiv \gamma_{abc}^{(2R,L)}, \quad (2.13)$$

$$\gamma_{cl,cl,cl,q}^{(4R)} = \gamma_{cl,q,q,q}^{(4R)} = \frac{1}{6}\alpha\lambda_+, \quad \gamma_{abcd}^{(4L)} \equiv \gamma_{abcd}^{(4R)}, \quad (2.14)$$

$$\gamma_{cl,cl,cl,q}^{(2R,2L)} = \gamma_{cl,q,q,q}^{(2R,2L)} = \frac{1}{4}\alpha\lambda_-, \quad (2.15)$$

а кроме того отличны от нуля также и значения, получаемые перестановкой индексов (например, $\gamma_{q,cl,q}^{(3R)} = \gamma_{cl,q,q}^{(3R)}$)

2.2.2 Ненулевое магнитное поле

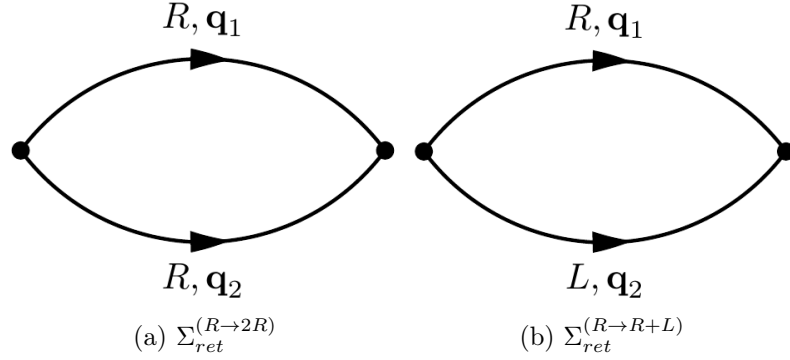


Рис. 2.1: Диаграммы во втором порядке теории возмущений, дающие вклад в $\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R)}$ для случая ненулевого магнитного поля. Линиям соответствуют матричные функции Грина (1.30), а точкам — тензорные вершины (2.12) и (2.13)

В наинищем порядке теории возмущений, имеются две диаграммы для собственной энергетической части $\Sigma_{ret}^{(R)}(\mathbf{q})$, изображённые на рисунке 2.1. Эти диаграммы в наинищем порядке теории возмущений были разобраны в статье [7], поэтому тут мы воспроизведём полученные ранее результаты. Отметим, что процедура самосогласованного вычисления эффекта от таких диаграмм, которая будет обсуждена ниже в разделе (2.3), была разобрана ещё раньше, в работе [21].

Используя диаграммную технику Келдыша и выражение для действия (2.10), мы приходим к следующим выражениям для вкладов в собственную энергетическую часть от диаграмм, изображённых на рисунке 2.1:

$$\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = i\alpha_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \left[G_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) + G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) \right] \quad (2.16)$$

$$\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = \frac{i\alpha_2^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \left[G_K^{(L)}(\mathbf{q}_1) G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) + G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_1) G_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) \right] \quad (2.17)$$

Используя “равновесное соотношение” (1.33), мы можем записать следующее выражение для мнимых частей этих выражений:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_1^2}{2\pi^2} \int d^2 \mathbf{q}_1 \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) (f(\omega_1) + f(\omega_2)) \quad (2.18)$$

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{q}_1 \text{Im } G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_1) \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) (f(\omega_1) + f(\omega_2)) \quad (2.19)$$

Подставляя выражения (2.4) в полученные уравнения, мы получаем следующие результаты:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_1^2}{8\pi^2 u^3} \delta(\omega - uq) I_1(uq, T), \quad (2.20)$$

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{128\pi^2 u^3} (\omega^2 - u^2 q^2) \left(f\left(\frac{\omega - uq}{2}\right) + f\left(\frac{\omega + uq}{2}\right) \right). \quad (2.21)$$

Величина $I_1(uq, T)$, входящая в первое выражение, определяется следующим образом:

$$I_1(\Omega, T) = \int d\omega_1 \omega_1 (\Omega - \omega_1) [f(\omega_1) + f(\Omega - \omega_1)]. \quad (2.22)$$

Этот интеграл можно вычислить следующим образом. При $T = 0$, функции распределения $f(\omega) = \text{sign } \omega$, и поэтому интеграл берётся тривиально, давая $I_1(\Omega, T = 0) = \frac{1}{3}\Omega^3$. Производная же по температуре:

$$\frac{\partial I_1}{\partial T} = 2 \times \int d\omega_1 \omega_1 (\Omega - \omega_1) f'_T(\omega_1) = \frac{8}{3}\pi^2 \Omega T \quad (2.23)$$

Тем самым мы получаем $I_1(T) = \frac{1}{3}\Omega(\Omega^2 + (2\pi T)^2)$, и приходим к следующему результату:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 2R)} = -\frac{\alpha_1^2}{24\pi^2} \delta(\omega - uq) q \left(q^2 + \left(\frac{2\pi T}{u} \right)^2 \right) \quad (2.24)$$

Для второго результата, даваемого формулой (2.21), удобно провести асимптотический анализ, рассмотрев случаи высоких температур $T \gg \omega, uq$ (который совпадает с случаем $\omega = uq$), а также низких температур $T \rightarrow 0$. Для последнего получается следующий ответ:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) \approx -\frac{\alpha_2^2}{64\pi^2 u^3} (\omega^2 - u^2 q^2) \theta(\omega^2 - u^2 q^2) \text{sign } \omega, \quad (2.25)$$

в то время как для случая высоких температур получается ответ:

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha_2^2}{16\pi^2 u^3} T \omega \quad (2.26)$$

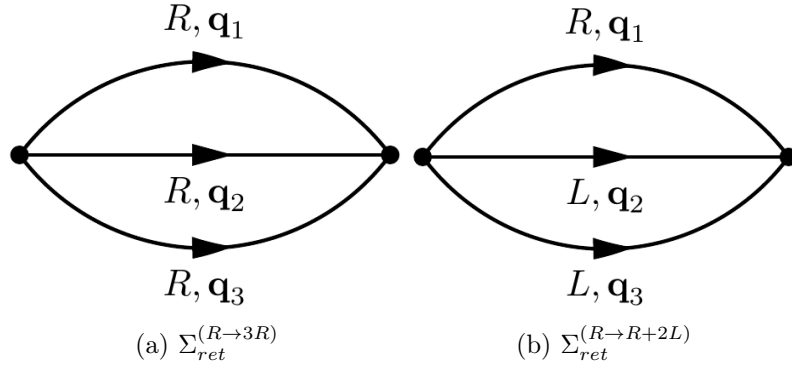


Рис. 2.2: Диаграммы во втором порядке теории возмущений, дающие вклад в $\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R)}$ для случая нулевых магнитных полей. Линиям соответствуют матричные функции Грина (1.30), а точкам — тензорные вершины (2.14) и (2.15)

2.2.3 Нулевое магнитное поле

Поступим аналогично предыдущему разделу. Во втором порядке теории возмущений имеются две диаграммы для собственной энергетической части “правых” плазмонов, изображённые на рисунке 2.2. Используя вид действия (2.11), мы можем сопоставить этим диаграммам следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(R \to 3R)}(\mathbf{q}) &= -6\alpha^2 \lambda_-^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_2}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \left[G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) + G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) G_K^{(R)}(\mathbf{q}_3) + \right. \\ &\quad \left. + G_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) G_K^{(R)}(\mathbf{q}_3) + G_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_K^{(R)}(\mathbf{q}_2) G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(R \to R+2L)}(\mathbf{q}) &= -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{q}_2}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \left[G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_2) G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_3) + G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_K^{(L)}(\mathbf{q}_2) G_K^{(L)}(\mathbf{q}_3) + \right. \\ &\quad \left. + G_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_2) G_K^{(L)}(\mathbf{q}_3) + G_K^{(R)}(\mathbf{q}_1) G_K^{(L)}(\mathbf{q}_2) G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_3) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

В отличие от предыдущего раздела, для построения простого выражения для $\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R)}$ для этих случаев уже недостаточно одного лишь “равновесного соотношения” (1.33). Мы воспользуемся также соотношениями Краммерса-Кронига, которые применимы для запаздывающих функций Грина, и позволяют выразить их через их мнимые части следующим образом:

$$G_{ret}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{\text{Im } G_{ret}(\omega')}{\omega' - \omega - i0} \quad (2.29)$$

Подставляя в этом виде запаздывающие функции Грина в полученные выше выражения, а затем беря интегралы по частотам $\omega_{1,2}$, мы приходим к следующим выражениям для мнимых частей:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) &= \frac{3\alpha^2 \lambda_-^2}{2\pi^4} \int d^2 \mathbf{q}_1 d^2 \mathbf{q}_2 \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_2) \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) &= \frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{8\pi^4} \int d^2 \mathbf{q}_1 d^2 \mathbf{q}_2 \text{Im } G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}_1) \text{Im } G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_2) \text{Im } G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подстановка спектральных функций (2.4) приводит нас к следующему ответу для величины (2.30):

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) = -\frac{3\alpha^2 \lambda_-^2}{16\pi^4 u^5} \delta(\omega - uq) I_2(uq, T), \quad (2.32)$$

Входящий сюда интеграл $I_2(uq, T)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2(\Omega, T) &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \Omega) \times \\ &\quad \times (1 + f(\omega_1)f(\omega_2) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_2)f(\omega_3)) \end{aligned} \quad (2.33)$$

При $T = 0$ он может быть взят аналогично интегралу $I_1(\Omega, T)$, который был исследован в предыдущем разделе; в то время как его производная выражается через сам интеграл I_1 :

$$\frac{\partial I_2}{\partial T} = 3 \times \int d\omega_1 \frac{\partial f(\omega_1)}{\partial T} \omega_1 I_1(\Omega - \omega_1, T) \quad (2.34)$$

Вычисляя полученные интегралы, мы приходим к выражению:

$$I_2(\Omega, T) = \frac{1}{30} \Omega [\Omega^2 + (2\pi T)^2] [\Omega^2 + 4(2\pi T)^2] \quad (2.35)$$

$$\text{Im } \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow 3R)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha^2 \lambda_-^2}{160\pi^4} \delta(\omega - uq) q \left[q^2 + \left(\frac{2\pi T}{u} \right)^2 \right] \left[q^2 + 4 \left(\frac{2\pi T}{u} \right)^2 \right]. \quad (2.36)$$

Для выражения (2.31) получается следующий результат:

$$\text{Im}\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{64\pi^4} I_3 \left(\frac{\omega - uq}{2}, \frac{\omega + uq}{2}, T \right) \quad (2.37)$$

Входящий сюда интеграл $I_3(\Omega_1, \Omega_2, T)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} I_3(\Omega_1, \Omega_2, T) &= \frac{1}{2} \Omega_1 \int d\omega_2 \omega_2 (\Omega_2 - \omega_2) \times \\ &\times (1 + f(\Omega_1)f(\omega_2) + f(\Omega_1)f(\Omega_2 - \omega_2) + f(\omega_2)f(\Omega - \omega_2)) = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_1 f(\Omega_1) I_2(\Omega_2, T) + 4\Omega_1 T^3 I_4 \left(\frac{\Omega_2}{2T} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Он, в свою очередь, выражается через интеграл $I_4(A)$, который определяется следующим образом:

$$I_4(A) = \int dz \cdot z(A - z)(1 + \coth z \coth(A - z)) \quad (2.39)$$

Этот интеграл уже не может быть выражен аналитически через элементарные функции; однако его асимптотики могут быть исследованы стандартными методами, и выглядят следующим образом:

$$I_4(A) \approx \begin{cases} \frac{\pi^2}{3}, & A \ll 1 \\ \frac{A^3}{3}, & A \gg 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Используя полученные асимптотики, мы можем также исследовать предельные случаи ответа для (2.31) в пределе низких температур $T \rightarrow 0$, а также в пределе высоких температур $T \gg \omega, uq$. В пределе низких температур получается результат:

$$\text{Im}\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) \approx -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{3072\pi^4 u^5} (\omega - uq)(\omega + uq)^3 \theta(\omega^2 - u^2 q^2) \text{sign } \omega, \quad (2.41)$$

в то время как в пределе высоких температур получается:

$$\text{Im}\Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+2L)}(\mathbf{q}) \approx -\frac{\alpha^2 \lambda_+^2}{48\pi^2 u^5} T^3 \omega \quad (2.42)$$

2.2.4 Анализ результатов

Перейдём теперь к анализу полученных результатов, которые даются формулами (2.24), (2.25) и (2.26) (для случая ненулевого магнитного поля) и (2.36),

а также (2.41) и (2.42) (для случая нулевого магнитного поля). Видно, что результаты, соответствующие распаду “правой” частицы только на “правые” существенно сингулярен на массовой поверхности $\omega = uq$; это напрямую связано с линейностью спектра и тем, что закон сохранения энергии тождественно совпадает с законом сохранения импульса. В свою очередь, оставшиеся диаграммы дают конечные результаты на массовой поверхности (даваемые формулами (2.26) и (2.42)); полученные ширины уровней могут быть оценены через параметры исходной спиновой задачи (1.1) следующим образом:

$$\Gamma^{(R \rightarrow R+L)} \sim \frac{h^2 T \omega^2}{J^4}, \quad \Gamma^{(R \rightarrow R+2L)} \sim \frac{T^3 \omega^2}{J^4} \quad (2.43)$$

Видно, что полученные ширины уровней параметрически малы; кроме того, можно заметить, что они сравниваются по порядку при $h \sim T$; исходя из чего можно построить предположение (которое будет проверено ниже), что случай “нулевых магнитных полей” соответствует случаю $h \ll T$, а случай “ненулевых магнитных полей” — случаю $h \gg T$.

Однако времена жизни определяются не этими процессами, а процессами распада частицы на частицы того же типа, поскольку они в наименьшем порядке получились сингулярными. Заметим, что сингулярность возникла только из-за того, что спектральные функции (2.4) тоже сингулярны. Очевидно, что для “одетых” пропагаторов это не так; у них спектральные функции уширены (2.9). Это значит, что если провести “самосогласованное” вычисление, в котором в выражениях (2.18) и (2.30), вместо невозмущенных функций Грина подставлены “одетые”, то и результат должен получиться конечным. Такое вычисление соответствует суммированию бесконечного ряда диаграмм для собственной энергетической части, которые наиболее сингулярны на массовой поверхности.

2.3 Самосогласованное вычисление

Как мы видели в предыдущем разделе, для вычисления времени затухания квазичастиц наименьшего порядка теории возмущений недостаточно, нужно придумать и провести некую процедуру пересуммирования диаграммного ряда, которая позволит избавиться от сингулярности. Такая процедура была обозначена в разделе (2.2.4), и её можно свести к самосогласованному решению

уравнений (2.18) и (2.30), с использованием спектральных функций “одетых” пропагаторов (2.9); эти уравнения оказывается возможным решить в пределе высоких температур $T \gg \omega$. Ниже будет проведено решение таких уравнений для случаев нулевого и ненулевого магнитного поля.

Следует отметить, что для спектра общего вида, $\epsilon(q) = uq + q^2/2m$ такая процедура была проделана в работе [21]. Спектр такого вида соответствует нашему случаю ненулевого магнитного поля, и вычисление, приведённое ниже, воспроизводит полученный в работе [21] результат.

2.3.1 Ненулевое магнитное поле

После подстановки уравнения (2.9) в уравнение (2.18), а также используя (2.7), мы получаем:

$$\Gamma(\omega, \epsilon) = \frac{\alpha_1^2 q}{16\pi^3 u^3} \int d\omega_1 d\omega_2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \omega_1 \omega_2 (f(\omega_1) + f(\omega_2)) J_1(\epsilon, \omega_1, \omega_2). \quad (2.44)$$

Интеграл J_1 , стоящий тут, в свою очередь самосогласованным образом зависит от Γ согласно соотношению:

$$J_1(\epsilon, \omega_1, \omega_2) = \int d\epsilon_1 d\epsilon_2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon) \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma(\omega_1, \epsilon_1) \Gamma(\omega_2, \epsilon_2)}{[\epsilon_1^2 + \Gamma^2(\omega_1, \epsilon_1)] [\epsilon_2^2 + \Gamma^2(\omega_2, \epsilon_2)]} \quad (2.45)$$

Величины ϵ_i , входящие в этот интеграл, связаны с импульсами согласно соотношению $\epsilon_i = \omega_i - uq_i$ (отклонение с массовой поверхности).

Проанализируем масштабы величин, входящие в это уравнение. Внешний интеграл задаёт характерный масштаб изменения величин $\omega_i \sim T$ во внутреннем интеграле. Обозначим $\Gamma(\omega) \equiv \Gamma(\omega, \epsilon = 0)$; тогда характерный масштаб $\epsilon_i \sim \Gamma(\omega_i) \sim \Gamma(T)$. Поскольку характерный масштаб $\epsilon \sim \Gamma(\omega) \ll \Gamma(T)$ (в силу исходного предположения $\omega \ll T$), это значит, что на самом деле в интеграле J_1 можно положить $\Gamma(\omega_i, \epsilon_i) \approx \Gamma(\omega_i)$ — независимыми от ϵ_i . В таком случае, сам интеграл можно взять и получить:

$$J_1(\epsilon, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2)}{\epsilon^2 + (\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2))^2}, \quad (2.46)$$

В силу всё того же предположения, ϵ -зависимостью этой величины можно пренебречь, и получить самосогласованное уравнение на величину $\Gamma(\omega)$, которая и определяет затухание квазичастиц на массовой поверхности.

Запишем это уравнение в терминах безразмерных величин. Для этого безразмерим частоту согласно $\omega = Tz$ и ширину $\Gamma(\omega) = \frac{|\alpha_1|}{u^2} \omega^2 \gamma(Tz)$; значит, на величину $\gamma(z)$ получается следующее уравнение:

$$\gamma(z) = \frac{1}{16\pi^4} \frac{1}{z} \int dz_1 dz_2 \delta(z_1 + z_2 - z) \frac{z_1 z_2}{z_1^2 \gamma(z_1) + z_2^2 \gamma(z_2)} (f(z_1) + f(z_2)) \quad (2.47)$$

В первую очередь, нас интересует зависимость $\gamma(z \ll 1)$, потому что это уравнение выведено в приближении $\omega \ll T$.

Проведём теперь анализ этого уравнения. Если в правой части предположить $\gamma(z) = \gamma_0 = \text{const}$, то интеграл будет набираться самосогласованным образом в нуле $z_i \sim z$ (то есть этой асимптотикой пользоваться можно), но при этом значение правой части окажется порядка $1/z$. Такой простой размерный анализ позволяет нам сделать анзац в это уравнение $\gamma(z \ll 1) = C_1/\sqrt{|z|}$; в таком случае z полностью выпадает из ответа, а для константы C_1 получается следующее значение:

$$C_1^2 = \frac{1}{8\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x|^{3/2} + |1-x|^{3/2}}, \quad C_1 \approx 7.08 \cdot 10^{-2}, \quad (2.48)$$

Проанализируем теперь полученный результат. Конечный ответ для времени жизни квазичастиц выглядит следующим образом:

$$\Gamma(\omega) = C_1 \frac{|\alpha_1|}{u^2} T^{1/2} |\omega|^{3/2} \sim \frac{|h| T^{1/2} |\omega|^{3/2}}{J^2} \quad (2.49)$$

Этот ответ ожидаемо оказался параметрически больше, чем ответ, полученный из других диаграмм (2.43). Тот факт, что в последнем интеграле $z_i \sim z$, на самом деле означает, что частица с энергией ω распадается на частицы, энергии которых тоже порядка $\omega_i \sim \omega$, а вовсе не на энергии порядка температуры $T \gg \omega$, как можно было бы ожидать. Поскольку числа заполнения для таких возбуждений большие, то такие возбуждения, на самом деле, ведут себя классическим образом. И действительно, такой ответ был получен при исследовании одномерной классической гидродинамики, в статье [16].

С другой стороны, тот факт, что энергии частиц, на которые происходит распад, оказались порядка исходной, означает, что исходное предположение, позволившее пренебречь зависимостью $\Gamma(\omega, \epsilon)$ от ϵ , вообще говоря, некорректно. Однако, можно ожидать, что полученный ответ (2.49) всё равно даёт пра-

вильную зависимость от энергии, и единственное, что изменится — константа C_1 .

2.3.2 Нулевое магнитное поле

Для нулевого магнитного поля можно составить аналогичное уравнение, подставляя выражения (2.9) в (2.30):

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega, \epsilon) = & \frac{3\alpha^2 \lambda^2}{32\pi^5 u^5} q \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \times \\ & \times (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_3) + f(\omega_1)f(\omega_2)) J_2(\epsilon, \omega_1, \omega_2, \omega_3). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Интеграл J_2 опять выражается самосогласованным образом через Γ согласно соотношению:

$$\begin{aligned} J_2(\epsilon, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \int d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon) \times \\ & \times \frac{1}{\pi^3} \frac{\Gamma(\omega_1, \epsilon_1) \Gamma(\omega_2, \epsilon_2) \Gamma(\omega_3, \epsilon_3)}{[\epsilon_1^2 + \Gamma^2(\omega_1, \epsilon_1)] [\epsilon_2^2 + \Gamma^2(\omega_2, \epsilon_2)] [\epsilon_3^2 + \Gamma^2(\omega_3, \epsilon_3)]} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Аналогичный предыдущему разделу анализ показывает, что если характерные частоты, на которые идёт распад, $\omega_i \gg \omega$, то ϵ -зависимость у величин $\Gamma(\omega, \epsilon)$ пренебрежима, и тем самым можно заменить их на $\Gamma(\omega) \equiv \Gamma(\omega, \epsilon = 0)$, составив самосогласованное уравнение на эту величину. Беря затем интеграл по ϵ , мы получаем:

$$J_2(\epsilon, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2) + \Gamma(\omega_3)}{\epsilon^2 + (\Gamma(\omega_1) + \Gamma(\omega_2) + \Gamma(\omega_3))^2}, \quad (2.52)$$

и при этом ϵ -зависимость в этом выражении пренебрежима. Проведём обезразмеривание согласно соотношениям $\omega = Tz$ и $\Gamma(\omega) = \frac{\alpha|\lambda_-|}{u^3} T\omega^2 \cdot \gamma(z)$; тем самым, мы приходим к следующему уравнению на величину $\gamma(z)$:

$$\begin{aligned} \gamma(z) = & \frac{3}{32\pi^6} \cdot \frac{1}{z} \int dz_1 dz_2 dz_3 \delta(z_1 + z_2 + z_3 - z) \frac{z_1 z_2 z_3}{\gamma(z_1) z_1^2 + \gamma(z_2) z_2^2 + \gamma(z_3) z_3^2} \times \\ & \times (1 + f(z_2)f(z_3) + f(z_1)f(z_3) + f(z_1)f(z_2)), \end{aligned} \quad (2.53)$$

в решении которого нас опять интересует асимптотика при $z \ll 1$. Если предположить медленную зависимость $\gamma(z)$ в правой части уравнения, то для левой

части мы получим логарифмически расходящийся интеграл в области интегрирования $z < z_i < 1$, что соответствует $\omega < \omega_i < T$. Этот факт оправдывает сделанное предположение, которое позволило пренебречь ϵ -зависимостью величины $\Gamma(\omega, \epsilon)$; а кроме того, это позволяет упростить полученное уравнение, раскладывая функции распределения согласно $f(z) = \coth \frac{z}{2} \approx \frac{z}{2}$:

$$\gamma(z) \approx \frac{3}{8\pi^6} \int_{|z_i| < 1} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 \delta(z_1 + z_2 + z_3 - z)}{\gamma(z_1)z_1^2 + \gamma(z_2)z_2^2 + \gamma(z_3)z_3^2} \quad (2.54)$$

Делая подстановку $\gamma(z \ll 1) = C_2 \sqrt{\ln \frac{1}{|z|}}$, аналогичным образом мы получаем, что зависимость от z в ведущем порядке выпадает, а для константы получается следующее значение: $C_2 = \sqrt{\sqrt{3}/2\pi^5} \approx 5.3 \cdot 10^{-2}$.

Аналогичным образом проведём анализ окончательного ответа:

$$\Gamma(\omega) = C_2 \frac{\alpha |\lambda_-|}{u^3} T \omega^2 \sqrt{\ln \frac{T}{|\omega|}} \sim T \frac{\omega^2}{J^2} \sqrt{\ln \frac{T}{|\omega|}} \quad (2.55)$$

В отличие от случая с ненулевым магнитным полем, характерные частоты, на которые распадается частица с энергией ω лежат в широкой области $\omega < \omega_i < T$, что оправдывает предположение, сделанное в начале; поэтому мы ожидаем, что этот ответ является точным. Кроме того, он, опять-таки, параметрически больше ответа, который был получен из других диаграмм (2.43), чего и следовало ожидать.

Если же продолжать аналогию с классической гидродинамикой — то ответ с такой же частотной зависимостью странным образом совпадает с затуханием в *двумерной* классической гидродинамике, которая была исследована в работе [16]. Является ли это просто совпадением, или этому есть какая-то причина — неизвестно.

2.3.3 Переходная область

В отсутствии магнитного поля, затухание для всех квазичастиц с энергией $\omega \ll T$ определяется формулой (2.55); в свою очередь, при достаточно сильном магнитном поле, оно даётся формулой (2.49). Сравнивая эти два ответа, оказывается возможным, наконец, выяснить ответ на вопрос, при каком магнитном поле происходит переход между этими двумя режимами. Для фиксиро-

рованной частоты ω , критическое магнитное поле, при котором происходит переход между двумя ответами, определяется формулой $h_c(\omega) = \sqrt{\omega T \ln(T/\omega)}$; при $h \ll h_c(\omega)$, применим ответ, полученный для “нулевого магнитного поля” (2.55), а при $h \gg h_c(\omega)$, можно пользоваться ответом для “ненулевого магнитного поля” (2.49).

Все формулы работают при $\omega \ll T$; имеется критическое магнитное поле $h_c = h_c(\omega \sim T) \sim T$, при котором уже все возбуждения “чувствуют” магнитное поле. Это согласуется с оценкой, полученной выше из сравнения ответов, получаемых из остальных диаграмм.

2.4 Роль поправок к времени жизни квазичастиц

В предыдущем разделе была проведена процедура самосогласованного вычисления времени жизни квазичастиц, учитывающая бесконечный ряд диаграмм Фейнмана, структура которых изображена на рисунках 2.1 и 2.2 (при этом линии соответствуют “одетым” пропагаторам). Несложно видеть, что ряд теории возмущений этими диаграммами не исчерпывается, и тем самым для исследования корректности приведённой процедуры, вообще говоря, необходимо исследовать вопрос о том, какой вклад будут давать старшие порядки теории возмущений. Для простоты мы исследуем случай ненулевого магнитного поля.

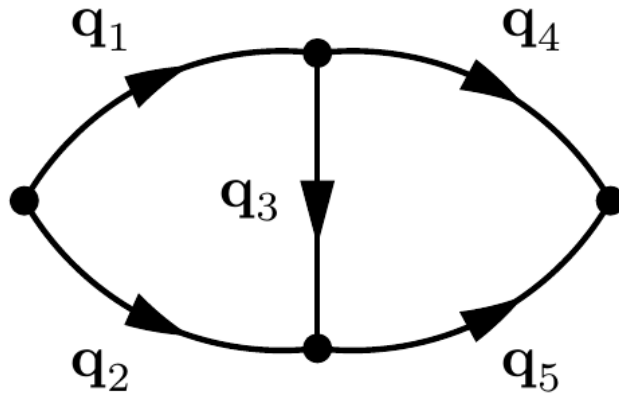


Рис. 2.3: Диаграмма для следующей поправки к $\Sigma_{ret}^{(R)}$ в случае конечного магнитного поля. Линиям соответствуют матричные функции Грина (1.30), а точкам — тензорные вершины (2.12)

Как и в предыдущем разделе, мы будем рассматривать распад только правых частиц (в силу тривиальной симметрии $L \leftrightarrow R$, ответ для левых будет та-

ким же), причём только на правые частицы (поскольку, как было выяснено выше, именно такие диаграммы дают наиболее сингулярный вклад в обратное время жизни квазичастиц Γ). В следующем порядке теории возмущений, имеется единственная диаграмма, удовлетворяющая этим критериям, и она изображена на рисунке 2.3. Выражение, которое ей соответствует, рассмотрено подробно в приложении (А), см. формулу (А.60). Это вычисление явно демонстрирует, что диаграмма-поправка *вообще не содержит малого параметра* по отношению к уже учтённой; большая степень “константы связи” (α_1^4) компенсируется большой степенью Γ в знаменателе (Γ^3), таким образом сокращаясь и давая вклад того же порядка. По-видимому, это будет происходить и в старших порядках теории возмущений.

Тот факт, что степень энергии получается та же, что и в результате самосогласованного вычисления диаграммы из низшего порядка теории возмущений, позволяет нам предполагать, что эта степень найдена правильно. Однако истинность этого предположения ещё предстоит выяснить.

Кроме того, предстоит выяснить, как обстоит дело с поправками к времени жизни квазичастиц при отсутствии магнитного поля, когда имеются вершины четвёртого порядка. Получаемые в том случае диаграммы можно интерпретировать как перенормировки вершин взаимодействия. Поскольку при самосогласованном подходе получались интегралы, которые набирались логарифмически на масштабах $\omega < \Omega < T$, то можно предположить, что основной вклад будет от “паркетных” диаграмм, и что для его расчёта можно будет применить процедуру в духе ренормгруппы.

2.5 Корреляционные функции

В предыдущем разделе были получены ответы для времени жизни квазичастиц на массовой поверхности $\Gamma(\omega)$ в пределе высоких температур $\omega \ll T$. В этом разделе будет исследовано, как такое затухание проявляет себя в корреляционных функциях спиновой задачи; а именно, мы проведём вычисление различных асимптотик корреляционной функции $\langle \hat{S}_{n_1}^z(t_1) \hat{S}_{n_2}^z(t_2) \rangle$.

Спиновая компонента вдоль оси z , согласно преобразованию Йордана-Вигнера, связана с фермионной плотностью, которая, в свою очередь, выражается через

поля $R(x)$ и $L(x)$, корреляционные функции которых и были исследованы в предыдущем разделе. Связь эта записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{S}_{n_1}^z(t_1) \hat{S}_{n_2}^z(t_2) \right\rangle &= a^2 \langle \rho(\mathbf{x}_1) \rho(\mathbf{x}_2) \rangle = a^2 (\langle R(\mathbf{x}_1) R(\mathbf{x}_2) \rangle + \langle L(\mathbf{x}_1) L(\mathbf{x}_2) \rangle + \\ &+ \langle L(\mathbf{x}_1) R(\mathbf{x}_2) \rangle + \langle R(\mathbf{x}_1) L(\mathbf{x}_2) \rangle) \end{aligned} \quad (2.56)$$

где a — постоянная решётки. Первые два члена соответствуют пропагатору “левых” и “правых” плотностей, выражения для которых в пределе высоких температур были найдены выше; последние два представляют собой “оффдиагональные” члены, которые возникают только при наличии магнитного поля из-за кубических вершин (1.21) и второй диаграммы, изображённой на рисунке 2.1. При отсутствии магнитного поля, вершины (1.18) сохраняют симметрии $R \mapsto -R$ и $L \mapsto -L$, из-за которой такие оффдиагональные члены отсутствуют. Ниже будет показано, что эти члены пренебрежимо малы по сравнению с диагональными, поэтому тут мы проведём анализ диагональных членов.

Первые два члена, стоящие в выражении (2.56) соответствуют “большим” компонентам Келдышевской функции Грина $G_{>}^{(R/L)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, которые в термодинамическом равновесии связаны с запаздывающей согласно соотношению (1.34). Мы сфокусируемся на вычислении только величины $G_{>}^{(R)}(\mathbf{x})$, поскольку ответы для $G_{>}^{(L)}(\mathbf{x})$ могут быть получены сменой знака у групповой скорости $u \mapsto -u$.

Без учёта нелинейности спектра, спектральная функция $\text{Im } G_{ret}^{(R)}(\omega) = -\frac{q}{2} \delta(\omega - uq)$. Обращая преобразование Фурье для $G_{>}^{(R)}(\mathbf{x})$, получается известный результат для корреляционной функции чистой жидкости Латтинджера:

$$G_{>}^{(R)}(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 T^2}{u^2 \sinh^2 \frac{\pi T(x-ut)}{u}} \quad (2.57)$$

Этот ответ локализован вблизи “светового конуса” $x = ut$, что отражает линейный закон дисперсии квазичастиц, и имеет вид волнового пакета. Характерная ширина этого пакета, в свою очередь, даётся “температурной длиной” $l_T \equiv \frac{u}{T}$. Ниже мы исследуем, как модифицируется этот ответ, если принять во внимание поправки от нелинейности спектра.

В пределе $\omega \ll T$, преобразование Фурье для $G_{>}^{(R)}(x, t)$ даётся следующей

формулой:

$$G_{>}^{(R)}(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2T}{\omega} e^{-i\omega t} \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \times \left(-\frac{q}{2\pi} \frac{\Gamma^{(R)}(\omega)}{(\omega - uq)^2 + (\Gamma^{(R)}(\omega))^2} \right), \quad (2.58)$$

где мы воспользовались явным видом “одетого” пропагатора (2.9). Интеграл по импульсам можно взять, используя известное положение полюсов $\omega - uq = \pm i\Gamma$, что приводит к следующей формуле:

$$G_{>}^{(R)}(x, t) = \frac{T}{2\pi u^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega + i\Gamma^{(R)}(\omega)\text{sign}x}{\omega} e^{(i\omega(x-ut) - \Gamma^{(R)}(\omega)|x|)/u} \quad (2.59)$$

Этой формулой мы и будем пользоваться в дальнейшем.

2.5.1 Ненулевое магнитное поле

Для вычисления интеграла (2.59) с затуханием, даваемым формулой (2.49), удобно ввести “диффузионный” масштаб длины согласно соотношению:

$$l_D = (T/u)^{1/3} (C_1 \alpha_1 |t|)^{2/3} \sim a \cdot (T/J)^{1/3} (h|t|)^{2/3} \quad (2.60)$$

Естественно ожидать, что коррелятор останется локализованным вблизи “светового конуса” $x = ut$; поэтому мы введём также характерное отклонение $\delta = (x - ut)/l_D$. В этих переменных, интеграл обезразмеривается, и после небольших преобразований можно прийти к следующему выражению (тут $z = \omega l_D/u$):

$$G_{>}^{(R)}(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{l_T l_D} \int_0^\infty dz e^{-z^{3/2}} \left[\cos(z\delta) - \frac{l_D}{x} z^{1/2} \sin(z\delta) \right] \quad (2.61)$$

Из такого безразмерного вида видно, что характерная ширина получаемого волнового пакета как раз даётся “диффузионной длиной” l_D . Можно вычислить асимптотики этого выражения для случаев $\delta \ll 1$ и $\delta \gg 1$. Первый предел описывает “высоту” волнового пакета, а второй — его “хвосты”, то есть поведение вдали от пика. В первом пределе получается следующий ответ:

$$G_{>}^{(R)}(|x - ut| \ll l_D) = \frac{\Gamma(5/3)}{2\pi^2} \frac{1}{l_T l_D}, \quad (2.62)$$

в то время как в обратном пределе получается ответ:

$$G_{>}^{(R)}(|x - ut| \gg l_D) \approx \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{1}{l_T l_D} \frac{1}{|\delta|^{5/2}}. \quad (2.63)$$

Наконец, можно исследовать границы применимости полученных ответов. Все ответы были получены в приближении $\omega \ll T$, поэтому характерные частоты, которые дают вклад в интегралы, должны удовлетворять этому соотношению. Проводя необходимую оценку, мы приходим к выводу, что эти ответы применимы при $l_D \gg l_T$. Поскольку l_D является функцией времени, и на малых временах l_D мала, то мы приходим к выводу, что затухание квазичастиц модифицирует вид корреляционных функций лишь на достаточно больших временах (которые как раз определяются соотношением $l_D(t) \gg l_T$). На малых же временах, функция Грина будет слабо отличаться от своего невозмущённого значения (2.57).

Как было сказано выше, наличие ненулевого магнитного поля также приводит к появлению “оффдиагональных” членов $\langle L(\mathbf{x}_1)R(\mathbf{x}_2) \rangle$, поскольку вершины (1.21) “перемешивают” поля $R(\mathbf{x})$ и $L(\mathbf{x})$, и роль этих членов была исследована в работе [7]. Для получения выражения для соответствующего пропагатора, необходимо записать уравнение Дайсона в матричном виде в пространстве “левых” и “правых” полей. Решение соответствующего уравнения Дайсона записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} G_{ret}^{(R)} & G_{ret}^{(RL)} \\ G_{ret}^{(LR)} & G_{ret}^{(L)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (G_{ret}^{(R,0)})^{-1} - \Sigma_{ret}^{(R)} & -\Sigma_{ret}^{(RL)} \\ -\Sigma_{ret}^{(RL)} & G_{ret}^{(L,0)-1} - \Sigma_{ret}^{(L)} \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.64)$$

и оффдиагональная “собственная энергия” совпадает с $\Sigma_{ret}^{(RL)} \equiv \Sigma_{ret}^{(R \rightarrow R+L)}$, формула (2.17). Подстановка вычисленных запаздывающих пропагаторов даёт следующее выражение для оффдиагональных членов:

$$\begin{aligned} G_{ret}^{(RL)}(\mathbf{q}) &\approx -\frac{1}{4\pi^2} \frac{q^2 \Sigma_{ret}^{(RL)}(\mathbf{q})}{(\omega - uq + i\Gamma(\omega))(\omega + uq + i\Gamma(\omega))} = \\ &= -\frac{1}{4\pi u} \Sigma_{ret}^{(RL)}(\mathbf{q}) (G_{ret}^{(R)}(\mathbf{q}) + G_{ret}^{(L)}(\mathbf{q})) \end{aligned} \quad (2.65)$$

В этом выражении в знаменателе был выброшен член $\frac{q^2}{4\pi^2} (\Sigma_{ret}^{(RL)}(\mathbf{q}))^2$, поскольку выражение для него (мнимая часть даётся формулой (2.21)) не имело сингулярностей; как следствие, этот член параметрически меньше (по степени константы связи, которая в конечном итоге соответствует малому параметру $h/J \ll 1$) уже написанных тут $\Gamma^{(R)}$ и $\Gamma^{(L)}$, и оставлять его было бы превышением точности. Из

такой структуры видно, что роль оффдиагонального члена сводится к малой перенормировке “амплитуды волновой функции”.

Наконец, из выражения (2.42) для $\Sigma_{ret}^{(RL)}$, которое соответствует исследуемому тут пределу $T \gg \omega$, uq мы заключаем, что эта поправка мала по сравнению с главным вкладом $G_{ret}^{(R)} + G_{ret}^{(L)}$, поскольку, во-первых, она содержит малый параметр α_2^2 , соответствующий $(h/J)^2 \ll 1$, а во-вторых — дополнительную степень частоты в числителе, что даст асимптотику, которая будет затухать быстрее. Из приведённого анализа мы заключаем, что оффдиагональные члены действительно пренебрежимо малы.

Приведём тут окончательный ответ для асимптотик спинового коррелятора (2.56):

$$\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle \approx \frac{\Gamma(5/3)}{2\pi^2} \cdot \frac{a^2}{l_T l_D}, \quad |n \mp ut/a| \ll l_D/a \quad (2.66)$$

$$\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle \approx \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{l_D^{3/2}}{l_T a^{1/2}} \frac{1}{|n \mp ut/a|^{5/2}}, \quad |n \mp ut/a| \gg l_D/a \quad (2.67)$$

(масштабы длины l_T и l_D даются формулами $l_T = u/T$ и (2.60) соответственно).

2.5.2 Нулевое магнитное поле

В этом пределе оказывается возможным также ввести характерный масштаб — “диффузионную длину”, задающую характерную ширину профиля корреляционной функции, согласно следующему соотношению:

$$l_D = (C_2 \alpha \lambda_- T |t|/u)^{1/2} \sim a \cdot (T|t|)^{1/2} \quad (2.68)$$

(обратим внимание на явно диффузионное поведение этой длины как функции времени, с эффективным коэффициентом диффузии $D \sim Ta^2$). Проводя аналогичное обезразмеривание в интеграле (2.59), вводя $z = \omega l_D/u$ и безразмерное расстояние до светового конуса $\delta = (x - ut)/l_D$, мы приходим к следующему выражению:

$$G_{>}^{(R)}(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{l_T l_D} \int_0^\infty dz e^{-z^2 \sqrt{\ln \frac{l_D}{z l_T}}} \left[\cos(z\delta) - \frac{l_D}{x} z \sqrt{\ln \frac{l_D}{z l_T}} \sin(z\delta) \right] \quad (2.69)$$

Из такого выражения видно, что характерная ширина профиля опять задаётся масштабом l_D , возможно — с логарифмическими поправками. Высота “волно-

вого пакета” определяется значением интеграла при $\delta \ll 1$ и даётся следующим выражением:

$$G_{>}^{(R)}(|x - ut| \ll l_D) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{l_T l_D} \frac{1}{\ln^{1/4}(l_D/l_T)}, \quad (2.70)$$

а сам профиль, вернее — его “хвосты” даются выражением:

$$G_{>}^{(R)}(|x - ut| \gg l_D) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{l_T l_D} \frac{1}{\ln^{1/4}(\delta \cdot l_D/l_T)} e^{-\delta^2/4 \ln^{1/4}(\delta \cdot l_D/l_T)}. \quad (2.71)$$

Как и в предыдущем случае, полученные формулы применимы только на достаточно больших временах — на тех, при которых $l_D(t) \gg l_T$.

Окончательный ответ для асимптотик спинового коррелятора (2.56) даётся следующими выражениями:

$$\langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{a^2}{l_T l_D} \frac{1}{\ln^{1/4}(l_D/l_T)}, \quad |n \mp ut/a| \ll l_D/a \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \langle S_n^z(t) S_0^z(0) \rangle = & \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{a^2}{l_T l_D} \ln^{-1/4} \left(\frac{|na \mp ut|}{l_T} \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{(na \mp ut)^2}{l_D^2} \ln^{-1/4} \left(\frac{|na \mp ut|}{l_T} \right) \right), \\ & |n \mp ut/a| \gg l_D/a \quad (2.73) \end{aligned}$$

(тут масштабы длины $l_T \equiv \frac{u}{T}$ и l_D даётся формулой (2.68)).

Глава 3

Транспортные свойства системы с беспорядком

В этой главе будут исследованы транспортные свойства исследуемой задачи при наличии беспорядка, но без учёта эффектов от нелинейности спектра — а именно, спиновую проводимость и теплопроводность. Спиновая проводимость определяется как отклик спинового тока на градиент магнитного поля вдоль оси z ; она интересна, в частности, тем, что на языке фермионов, полученных из преобразования Йордана-Вигнера, она соответствует обычной электрической проводимости, согласно закону Ома $j = -\sigma \nabla \varphi$. В свою очередь, теплопроводность определяется через отклик тока энергии на градиент температуры, согласно закону Фурье: $j_E = -\kappa \nabla T$. В разделе (1.5) обсуждалась фазовая диаграмма неупорядоченной модели, и показывалось, что в области $1 > \Delta > 1/2$ (эквивалентно, $K > 3/2$) возбуждения системы делокализованы и через такую систему может происходить транспорт; тем самым, приводимое в этой главе вычисление относится именно к этой области. Приведённые в этой главе результаты изложены также в статье [12].

3.1 Теория линейного отклика

В рамках теории линейного отклика Кубо можно показать, что вычисление транспортных свойств системы приводится к вычислению равновесных запаздывающих корреляторов токов. Сперва мы продемонстрируем общие резуль-

таты, даваемые теорией линейного отклика, а затем обсудим применение её к нашей задаче.

Пусть гамильтониан взаимодействия с внешним полем имеет следующий вид:

$$\hat{V} = \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

и пусть плотности $n(\mathbf{r}, t)$ соответствует через уравнение непрерывности некий ток $j(\mathbf{r}, t)$, так что $\partial_t n(\mathbf{r}, t) + \text{div} j(\mathbf{r}, t) = 0$; а потенциалу соответствует некое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, такое что $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)$. Тогда отклик самого тока на это возмущение даётся формулой $j_\alpha(\mathbf{q}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) E_\beta(\mathbf{q}, \omega)$. Проводимость, входящая сюда, записывается следующим образом:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{i}{\omega + i0} (\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, 0)), \quad (3.2)$$

а Фурье-образ $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ тут представляет собой просто равновесный коррелятор, вычисленный по невозмущённой системе:

$$\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{i}{\hbar} \theta(t - t') \left\langle \left[\hat{j}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{j}_\beta(\mathbf{r}', t') \right] \right\rangle_0, \quad (3.3)$$

что с точностью до знака совпадает с запаздывающей компонентой Келдышевской функции Грина, (см. раздел (1.6)).

Обсудим теперь применения этих общих формул для нашей задачи. Во-первых, поскольку задача одномерная, то пространственных индексов α, β у нас нет. Для вычисления проводимости в качестве потенциала φ берётся обычный электростатический потенциал; тогда поле E , соответствующее ему — это просто электрическое поле. В таком случае получается закон Ома, и σ , вычисленная по формуле (3.2), будет давать просто проводимость. При этом токи, которые стоят в формуле (3.3), представляют собой электрический ток.

Вообще говоря, взаимодействие с переменным температурным полем описать с помощью гамильтониана нельзя. Однако, имеется “трюк”, описанный в работе [17] с введением так называемого “гравитационного потенциала Латтинджера”, позволяющий построить выражения, полностью аналогичные формуле Кубо, для случая меняющейся в пространстве температуры. Отличие заключается в том, что вместо электрического тока, в формулу (3.3) необходимо подставлять ток энергии; и для получения коэффициента теплопроводности, выражение, даваемое формулой (3.2) необходимо домножить на $\beta \equiv 1/T$.

Приведём качественные соображения, которые позволяют прийти к тому же результату. Пусть гамильтониан локализован, то есть имеет вид $\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{h}(\mathbf{r})$, а температура меняется в пространстве согласно $T(\mathbf{r}) = T + \delta T(\mathbf{r})$, и $\delta T \ll T$. Можно рассмотреть следующий вид матрицы плотности для такой задачи:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left(- \int d\mathbf{r} \frac{h(\mathbf{r})}{T(\mathbf{r})} \right) \approx \frac{1}{Z} \exp \left(- \frac{1}{T} \int d\mathbf{r} \left(1 - \frac{\delta T(\mathbf{r})}{T} \right) h(\mathbf{r}) \right). \quad (3.4)$$

Таким образом, флуктуирующую в пространстве температуру можно в каком-то смысле интерпретировать как “возмущение” к гамильтониану $\hat{V} = - \int d\mathbf{r} \frac{\delta T}{T} h(\mathbf{r})$. Если поступить таким образом, мы приходим к выводу, что плотность, которую нужно взять для вычисления теплопроводности по формуле Кубо — это плотность энергии, а соответствующий ток — ток энергии. Получаемая в рамках теории линейного отклика формула воспроизводит закон Фурье, и коэффициент теплопроводности связывается с вычисленной по формуле (3.2) проводимостью как $\kappa = \sigma/T$. Это в точности воспроизводит результат работы [17].

3.2 Токи

Таким образом, для вычисления кинетических коэффициентов по формуле Кубо, необходимо знать явный операторный вид токов — спинового (эквивалентно, тока частиц на языке фермионов Йордана-Вигнера) и тока энергии. Сперва мы приведём вычисления токов в терминах спиновых операторов исходной модели (1.1), а затем — в непрерывном пределе, используя модель жидкости Латтинджера (1.9).

3.2.1 Решёточная модель

Гамильтониан (1.1) имеет общий вид $\hat{H} = \sum_n \hat{h}_{n,n+1}$, где $\hat{h}_{n,n+1}$ — локальные операторы энергии, действующие на узлы n и $n+1$; можно также заметить, что эти операторы коммутируют с величиной $\hat{S}_n^z + \hat{S}_{n+1}^z$. Это позволяет написать спиновый ток в общем виде; действительно, можно записать уравнение Гейзенберга для \hat{S}_n^z :

$$\partial_t \hat{S}_n^z = i(-[\hat{h}_{n-1,n}, \hat{S}_{n-1}^z] + [\hat{h}_{n,n+1}, \hat{S}_n^z]) \quad (3.5)$$

Это уравнение имеет вид дискретного аналога уравнения непрерывности $\partial_t \hat{S}_n^z + \hat{j}_{n+1}^{(s)} - \hat{j}_n^{(s)} = 0$, с выражением для спинового тока $\hat{j}_n^{(s)} = i[\hat{S}_{n-1}^z, \hat{h}_{n-1,n}]$. Для исследуемой модели окончательное выражение имеет вид:

$$\hat{j}_n^{(s)} = -\frac{iJ}{2}(\hat{S}_{n-1}^+ \hat{S}_n^- - \hat{S}_{n-1}^- \hat{S}_n^+) \quad (3.6)$$

Полный спиновый ток $\hat{J}^{(s)} = \sum_n \hat{j}_n^{(s)}$ является сохраняющейся величиной только в отсутствии магнитного поля, беспорядка и анизотропии.

Ток энергии получается из уравнения Гейзенберга для оператора локальной энергии $\hat{h}_{n,n+1}$:

$$\partial_t \hat{h}_{n,n+1} = i(-[\hat{h}_{n,n+1}, \hat{h}_{n-1,n}] + [\hat{h}_{n+1,n+2}, \hat{h}_{n,n+1}]) \quad (3.7)$$

Это уравнение также имеет вид уравнения непрерывности $\partial_t \hat{h}_{n,n+1} + (\hat{j}_{n+1}^{(E)} - \hat{j}_n^{(E)}) = 0$ с общим выражением для тока энергии $\hat{j}_n^{(E)} = i[\hat{h}_{n-1,n}, \hat{h}_{n,n+1}]$. Непосредственное вычисление этого коммутатора приводит к следующему выражению для тока энергии:

$$\hat{j}_n^{(E)} = J^2 \det \begin{pmatrix} \hat{S}_{n-1}^x & \hat{S}_n^x & \hat{S}_{n+1}^x \\ \hat{S}_{n-1}^y & \hat{S}_n^y & \hat{S}_{n+1}^y \\ \Delta \hat{S}_{n-1}^z & \hat{S}_n^z & \Delta \hat{S}_{n+1}^z \end{pmatrix} + (h + h_n) \hat{j}_{n+1}^{(s)} \quad (3.8)$$

Для сохранения полного тока энергии $\hat{J}^{(E)} = \sum_n \hat{j}_n^{(E)}$ необходимо лишь отсутствие беспорядка $h_n = 0$. Этот факт связан с интегрируемостью XXZ модели и был обсуждён выше, в разделе (1.3.2).

3.2.2 Непрерывная модель

Рассмотрим теперь модель жидкости Латтинджера (1.9), при наличии рассеяния назад (1.10) (как было сказано выше, член, отвечающий за рассеяние вперёд $\eta(x)$, можно выбросить тривиальным фазовым сдвигом (1.11)). Вывод выражений для тока был проделан, например, в работе [12]; приведём его тут. Исследуемый непрерывный гамильтониан имеет общий вид $\hat{H} = \int dx \cdot \rho^{(E)}(\phi(x), \nabla \phi(x), \Pi(x))$ (тут $\rho^{(E)}(x)$ — плотность энергии); поэтому уравнения движения для полей записываются в общем виде следующим образом:

$$\partial_t \phi = \frac{\partial \rho^{(E)}}{\partial \Pi}, \quad \partial_t \Pi = -\frac{\partial \rho^{(E)}}{\partial \phi} + \nabla \frac{\partial \rho^{(E)}}{\partial (\nabla \phi)} \quad (3.9)$$

Спиновая плотность $a^{-1}\hat{S}_n^z$ (a — постоянная решётки) соответствует плотности фермионов Йордана-Вигнера $\rho^{(s)}(x) = -\frac{1}{\pi}\nabla\phi(x)$. Используя уравнения движения (3.9), можно привести уравнение движения для спиновой плотности к виду уравнения непрерывности $\partial_t\rho^{(s)}(x) + \nabla j^{(s)}(x) = 0$, где спиновый ток записывается следующим образом:

$$\hat{j}^{(s)} = uK\Pi = \frac{1}{\pi}\partial_t\phi \quad (3.10)$$

Уравнение движения для плотности энергии в общем виде также приводится к виду уравнения непрерывности:

$$\partial_t\rho^{(E)} = \frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\phi}\partial_t\phi + \frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\nabla\phi}\partial_t\nabla\phi + \frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\Pi}\partial_t\Pi = \nabla\left(\frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\nabla\phi}\frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\Pi}\right) \quad (3.11)$$

и тем самым ток энергии записывается следующим образом:

$$j^{(E)} = -\frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\nabla\phi}\frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial\Pi} = -u^2\Pi\nabla\phi = -\frac{u}{\pi K}\partial_t\phi\nabla\phi \quad (3.12)$$

Полученные тут выражения (3.10) и (3.12) служат непрерывными аналогами выражений (3.6) и (3.8). Стоит отдельно обратить внимание, что в выражение для тока энергии в непрерывном пределе не входит беспорядок, хотя в решёточной модели зависимость от него имеется. Причину этого можно проследить, если аккуратно построить непрерывный предел выражения (3.8) — оказывается, что член, соответствующий рассеянию назад присутствует, но имеет следующий порядок малости в смысле разложения по параметру $ka \ll 1$ (k — характерный импульс полей), и тем самым при таком описании задачи он теряется. Учёт этого члена приведёт к модификации получаемых ниже ответов для коэффициента теплопроводности, однако поправки будут меньше по параметру $ka \sim T/J \ll 1$. Однако, поскольку природа этих членов та же, что и у рассмотренных в предыдущей главе эффектов нелинейности спектра, эти члены могут оказаться важными при их совместном рассмотрении с эффектами от беспорядка.

3.3 Келдышево описание

Для вычисления кинетических коэффициентов в рамках теории линейного отклика мы, так же как и в предыдущей главе, будем пользоваться диа-

граммной техникой Келдыша (см. раздел (1.6)). Однако для этой задачи более удобным оказывается работать не с полями плотностей “левых” и “правых” фермионов $L(x)$ и $R(x)$, а с каноническими полями $\phi(x)$ и $\Pi(x)$. Поэтому в первую очередь нужно вычислить невозмущенный запаздывающий пропагатор этих полей, $G_{ret}^{(0)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i \langle \phi_{cl}(\mathbf{x}) \phi_q(\mathbf{y}) \rangle$. Его Фурье-образ записывается следующим образом:

$$G_{ret}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{\pi u K}{(\omega + i0)^2 - u^2 q^2} \quad (3.13)$$

Для дальнейшего вычисления будет полезным вычислить также пропагаторы в координатном представлении. Беря преобразование Фурье от этого выражения, мы приходим к ответу:

$$G_{ret}^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{\pi K}{2} \theta(t) \theta(ut - |x|) \quad (3.14)$$

Кроме того, вычислим также и Келдышевскую компоненту функции Грина, которая получается из равновесного соотношения (1.33). Выражение для $G_K^{(0)}(\mathbf{x})$ оказывается инфракрасно расходящимся, однако следующая разница оказывается конечной:

$$G_K^{(0)}(\mathbf{x}) - G_K^{(0)}(0) = i \frac{K}{2} \ln \left(\frac{u^2 \beta^2}{\pi^2 a^2} \left| \sinh \frac{\pi(x+ut)}{u\beta} \sinh \frac{\pi(x-ut)}{u\beta} \right| \right) \quad (3.15)$$

Мы также будем пользоваться стандартным уравнением Дайсона, решение которого записывается как:

$$G_{ret}(\mathbf{q}) = \frac{\pi u K}{\omega^2 - u^2 q^2 - \pi u K \Sigma_{ret}(\mathbf{q})} \quad (3.16)$$

Мы интересуемся величинами, усреднёнными по реализациям беспорядка. Диаграммная техника Келдыша позволяет произвести такое усреднение в самом начале, на уровне действия. Исходное действие, описывающее взаимодействие с беспорядком (гамильтониан (1.10)), имеет общий вид $\hat{H}_{dis} = \int dx (\xi(x) A[\phi(x)] + h.c)$. Усреднение производится следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{iS_{dis}} &= \left\langle \exp \left(-i \int_C H_{dis}[\xi, \xi^*] dt \right) \right\rangle_{dis} = \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_C d^2 \mathbf{x}_1 d^2 \mathbf{x}_2 \langle (\xi(x_1) A[\phi(\mathbf{x}_1)] + h.c) (\xi(x_2) A[\phi(\mathbf{x}_2)] + h.c) \rangle \right) = \\ &= \exp \left(-\frac{D}{2} \int_C dx dt_1 dt_2 (A[\phi(\mathbf{x}_1)] A^\dagger[\phi(\mathbf{x}_2)] + h.c) \right) \quad (3.17) \end{aligned}$$

(тут интегрирование происходит по Келдышевскому контуру; и мы использовали теорему Вика и то, что беспорядок гауссов и дельта-коррелирован). В нашем случае оператор $A[\phi] = \frac{1}{2\pi a} e^{-2i\phi}$; подставляя в эту формулу, а также переходя к “классическим” и “квантовым” компонентам поля согласно формуле (1.31) (отметим, что используемое тут представление отличается от используемого в предыдущей главе представления (1.28)!), мы приходим к следующему виду Келдышевого действия, описывающего беспорядок:

$$S_{dis} = \frac{iD}{\pi^2 a^2} \int dt_1 dt_2 dx \cos(2(\phi_{cl}(x, t_1) - \phi_{cl}(x, t_2))) \sin \phi_q(x, t_1) \sin \phi_q(x, t_2). \quad (3.18)$$

По действию такого вида дальше будет строиться теория возмущений.

Наконец, формула Кубо (3.3) просто соответствует запаздывающей компоненте Келдышевского коррелятора ток-ток. Поэтому, с учётом явного вида выражений для токов (3.10) и (3.12), выражения для необходимых корреляторов записываются следующим образом:

$$\chi^{(s)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{i}{\pi^2} \langle \partial_t \phi_{cl}(\mathbf{x}_1) \partial_t \phi_q(\mathbf{x}_2) \rangle \quad (3.19)$$

$$\chi^{(E)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{i u^2}{\pi^2 K^2} \langle (\partial_t \phi \nabla \phi)_{cl}(\mathbf{x}_1) (\partial_t \phi \nabla \phi)_q(\mathbf{x}_2) \rangle \quad (3.20)$$

Соответственно, спиновая проводимость σ и коэффициент теплопроводности κ даются следующими формулами (далее мы будем рассматривать только пространственно-однородный случай, поэтому волновой вектор в этом выражении положен равным $q = 0$):

$$\sigma(\omega) = -\frac{i}{\omega} (\chi^{(s)}(\omega) - \chi^{(s)}(0)) \quad (3.21)$$

$$\kappa(\omega) = -\frac{i\beta}{\omega} (\chi^{(E)}(\omega) - \chi^{(E)}(0)) \quad (3.22)$$

3.4 Теория возмущений

Приступим теперь к вычислению поправок к запаздывающему пропагатору, которые происходят из действия (3.18). В наинизшем порядке теории возмущений имеются две диаграммы, соответствующие рисунку 3.1. Аналитическое

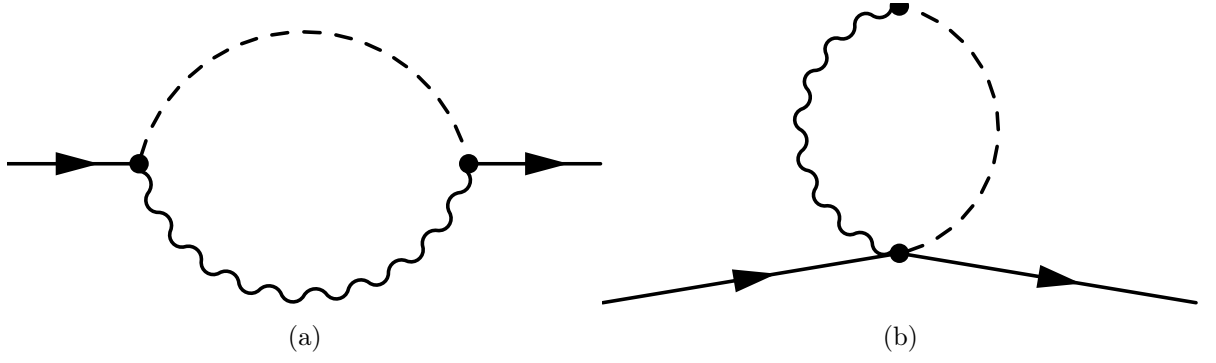


Рис. 3.1: Диаграммы для Σ_{ret} в наинизшем порядке теории возмущений. Пунктирной линии соответствует рассеяние на одной примеси (описываемое коррелятором $\langle \xi(x)\xi^*(y) \rangle$), а волнистой линии соответствует усреднение нелинейных вершин по полям ϕ

выражение для собственной энергетической части, соответствующее этим выражениям, можно извлечь из поправок в наинизшем порядке теории возмущений к пропагатору:

$$\begin{aligned}
i\delta G_{ret}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \langle \phi_{cl}(\mathbf{x})\phi_q(\mathbf{x}')iS_{dis} \rangle = \\
&= \frac{iD}{\pi^2\alpha^2} \int dt_1 dt_2 dy \langle \phi_{cl}(\mathbf{x})\phi_q(\mathbf{x}') \cos(2(\phi_{1cl} - \phi_{2cl})) \sin \phi_{1q} \sin \phi_{2q} \rangle_0 = \\
&= \frac{4iD}{\pi^2\alpha^2} \int dt_1 dt_2 dy G_{ret}^{(0)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) \left(G_{ret}^{(0)}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}') - G_{ret}^{(0)}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}') \right) \times \\
&\quad \times \langle \sin(2(\phi_{1cl} - \phi_{2cl})) \cos \phi_{1q} \sin \phi_{2q} \rangle_0. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

В этом выражении используется краткая нотация $\mathbf{y}_i = (y, t_i)$ и $\phi_i = \phi(\mathbf{y}_i)$. Поскольку вершина, даваемая выражением (3.18), существенно нелинейная, то необходимо пояснение, как именно было получено это выражение. Для использования теоремы Вика с выражением вида $\langle \phi(\mathbf{x}_1)f(\phi(\mathbf{x}_2)) \rangle$ с нелинейной функцией $f(\phi)$, мы раскладываем её в ряд Тейлора, затем используем теорему Вика почленно (с учётом всех симметричных факторов), а затем собираем ряд Тейлора обратно. Такая процедура приводит к соотношению $\langle \phi(\mathbf{x}_1)f(\phi(\mathbf{x}_2)) \rangle = \langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \rangle \times \left\langle \frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi(\mathbf{x}_2)) \right\rangle$, что в конечном итоге и позволило построить приведенное выражение. Сравнивая это выражение с уравнением Дайсона, которое получится если заменить один из невозмущённых пропагаторов $G_{ret}^{(0)}$ в нём на точный пропагатор G_{ret} , мы приходим к следующему выражению для собствен-

ной энергетической части:

$$\Sigma_{ret}(\omega) = -\frac{4D}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty dt (1 - e^{i\omega t}) e^{2i(G_K^{(0)}(t) - G_K^{(0)}(0))} \sin(2G_{ret}^{(0)}(t)). \quad (3.24)$$

Зависимость от входящего импульса q у этого выражения пропала, и все пропагаторы, стоящие тут, берутся в совпадающей точках $G_\alpha(t) \equiv G_\alpha(x = 0, t)$. Это выражение для собственной энергии приводит к двум типам поправок при низких температурах $T \ll J$. Первый тип происходит с ультрафиолетовых масштабов $T \ll \omega \ll J$, описывающий виртуальные процессы, которые и приводят к обсуждаемым выше уравнениям ренормгруппы (1.24). Второй тип поправок происходит от масштабов $\omega \sim T$; он описывает реальные процессы рассеяния на примесях, и приводит к конечному времени жизни квазичастиц и конечной $\text{Im} \Sigma_{ret}(\omega)$. Сейчас нас будет интересовать именно эти поправки.

Используя явные выражения (3.14) и (3.15), можно выписать явное выражение:

$$\Sigma_{ret}(\omega) = -\frac{2D\beta}{\pi^3 \alpha^2} \left(\frac{2\pi\alpha}{u\beta} \right)^{2K} \sin(\pi K) \left(B \left(1 - 2K, K - i\frac{\beta\omega}{2\pi} \right) - B(1 - 2K, K) \right). \quad (3.25)$$

Тут $B(x, y)$ — бета-интеграл Эйлера. На малых частотах $\omega \ll T$, это выражение упрощается до вида $\Sigma_{ret}(\omega \ll T) = -i\omega/u\pi K\tau$, со следующим временем затухания:

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{2DK}{u} \frac{\Gamma^2(K)}{\Gamma(2K)} \left(\frac{2\pi aT}{u} \right)^{2K-2} \quad (3.26)$$

Важно отметить температурную зависимость произведения $T\tau \propto T^{3-2K}$; тем самым, в области параметров $K > 3/2$, рассматриваемой в данной работе, в пределе низких температур эта комбинация оказывается большой.

Наконец, подставляя собственную энергию в таком виде в выражение для “одетого” пропагатора (3.16), мы приходим к следующему его виду:

$$G_{ret}(\mathbf{q}) = \frac{\pi u K}{\omega^2 - u^2 q^2 + i\omega/\tau} \quad (3.27)$$

3.5 Кинетические коэффициенты

Используя формулу Кубо и явный вид одетого пропагатора (3.27), можно приступить к непосредственному вычислению спиновой проводимости и тепло-

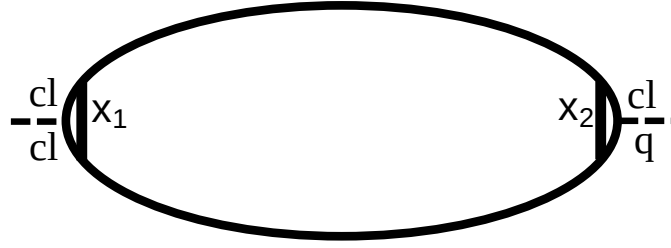


Рис. 3.2: Петлевая диаграмма для коррелятора $\chi^{(E)}$. Токковые вершины представляют собой комбинацию производных $(\partial_t \nabla' + \partial_t' \nabla)$, с дифференцированиями ∂_t, ∇ действующими на один пропагатор, идущий из вершины, а ∂_t', ∇' — на другой.

проводности. Используя формулу (3.19) и (3.21), мы сразу приходим к связи запаздывающего пропагатора и спиновой проводимости:

$$\sigma(\omega) = \frac{i\omega}{\pi^2} G_{ret}(\omega, q = 0) = \frac{uK}{\pi} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}. \quad (3.28)$$

Последнее выражение работает в пределе $\omega \ll T$. Обратим внимание, что частотная зависимость этого выражения такая же, как и в классической формуле Друде для металлов.

Для вычисления коэффициента теплопроводности согласно формулам (3.20) и (3.22), необходимо рассмотрение “петлевой диаграммы”, изображённой на рисунке 3.2. По аналогии со слаболокализационными поправками [18] в нормальном металле с примесями, к этой диаграмме также можно рассматривать “интерференционные” поправки от вершины (3.18), соединяющие верхнюю и нижнюю линию. Роль таких поправок будет рассмотрена ниже, в разделе (3.5.1); тут мы приведём вычисление в наинизшем порядке (однако с “одетыми” функциями Грина (3.27).

Таким образом, аналитическое выражение для коррелятора токов энергии записывается следующим образом (тут $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, в соответствии с диаграммой, изображённой на рисунке 3.2)

$$\begin{aligned} \chi^{(E)}(\mathbf{x}) \equiv & -i \frac{u^2}{2\pi^2 K^2} \left(\partial_t^2 G_K(\mathbf{x}) \nabla^2 G_{adv}(-\mathbf{x}) + \partial_t \nabla G_{ret}(\mathbf{x}) \partial_t \nabla G_K(-\mathbf{x}) + \right. \\ & \left. + \partial_t^2 G_{ret}(\mathbf{x}) \nabla^2 G_K(-\mathbf{x}) + \partial_t \nabla G_K(\mathbf{x}) \partial_t \nabla G_{adv}(-\mathbf{x}) \right) \quad (3.29) \end{aligned}$$

В этом выражении были выброшены “контактные члены”, связанные с тем, что $\langle \partial_t \phi_1 \partial_t \phi_2 \rangle \neq -\partial_t^2 \langle \phi_1 \phi_2 \rangle$ (из-за того, что эти корреляторы явно содержат времен-

ное упорядочение); эти члены не содержат частотно-импульсной зависимости и сокращаются в выражении (3.22) членом $\chi^{(E)}(0)$. Фурье-образ этого выражения даётся следующей формулой:

$$\begin{aligned} \chi^{(E)}(\mathbf{q}) = & -i \frac{u^2}{4\pi^2 K^2} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \times \\ & \times (\epsilon(p - q) + (\epsilon - \omega)p)^2 \left\{ (f(\epsilon) - f(\epsilon - \omega)) G_{ret}(\mathbf{p}) G_{adv}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \right. \\ & \left. + f(\epsilon - \omega) G_{ret}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) G_{ret}(\mathbf{p}) - f(\epsilon) G_{adv}(\mathbf{p}) G_{adv}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \right\} \quad (3.30) \end{aligned}$$

В этом выражении мы воспользовались также равновесным соотношением для Келдышевской функции Грина (1.33), поэтому ответ выражен через Бозевские функции распределения $f(\epsilon) \equiv \coth \frac{\epsilon}{2T}$. Члены $G_{ret} G_{ret}$ и $G_{adv} G_{adv}$ также не дают никакого вклада в коэффициент теплопроводности и сокращаются членом $\chi^{(E)}(0)$. Для статического коэффициента теплопроводности (на частоте $\omega = 0$) это приводит нас к следующему выражению:

$$\kappa = \frac{u^2}{\pi^2 K^2} \frac{1}{2T^2} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{\epsilon^2}{\sinh^2 \frac{\epsilon}{2T}} \int \frac{dp}{2\pi} p^2 G_{ret}(\epsilon, p) G_{adv}(\epsilon, p) \quad (3.31)$$

Наконец, проводя интегрирование с использованием “одетых” пропагаторов, мы приходим к ответу:

$$\kappa = \frac{\pi}{3} u T \tau. \quad (3.32)$$

Перейдём теперь к обсуждению полученных результатов. По аналогии с законом Видемана-Франца для нормальных металлов, из коэффициента теплопроводности и спиновой проводимости можно составить число Лоренца $L = \kappa / \sigma T$. В рамках теории Ферми-жидкости, число Лоренца равно $L_{FL} = \pi^2 / 3$; используя полученные ответы (3.28) и (3.32), получаем, что число Лоренца для неупорядоченной жидкости Латтинджера равно $L = \pi^2 / 3K$, то есть в K раз меньше. Формально эти выражения совпадают в точке $K = 1$, что соответствует невзаимодействующим фермионам; стоит, однако, обратить внимание, что эта точка очевидным образом относится к локализованной области, и поэтому наши ответы для неё неприменимы (напомним, что область применимости этих ответов соответствует $K > 3/2$). Такое же число Лоренца $L_{LL} = \pi^2 / 3K$ получается при рассмотрении чистой жидкости Латтинджера [1] (если рассматривать полную проводимость образца); а кроме того, такое же число Лоренца получает-

ся при рассмотрении задачи об одной слабой туннельной примеси, рассмотренной в классической работе [20]. Поскольку мы рассматривали только эффекты от однократного рассеяния на примесях, и сами примеси в рамках модели Гауссового белого шума считаются слабыми, такого совпадения и стоило ожидать. В другом предельном случае — случае сильной туннельной примеси — ответ для числа Лоренца модифицируется и даётся уже формулой $L_{KF} = \pi^2/(2K + K^2)$.

Ответы для проводимости и теплопроводности в рамках модели жидкости Латтинджера были получены также ранее, в работе [19] с использованием так называемого “memory function”-формализма. Полученный в нашей работе ответ для проводимости (3.28) в точности воспроизводит известный ранее; однако ответы для теплопроводности (3.32) отличаются, в результате чего получается и другое число Лоренца $L_{LO} = \pi^2/9 \times (2K^{-1} + K^{-2})$. Это отличие может быть связано с ограничениями используемого в работе [19] формализма, который заключается в вычислении высокочастотного разложения для проводимости с последующей экстраполяцией к статическому пределу. Кроме того, эта процедура предполагает Друдевскую частотную зависимость, поэтому ответы для проводимости совпадают. Однако частотная зависимость коэффициента теплопроводности имеет более сложную структуру, и содержит два независимых масштаба частоты $\omega \sim T$ и $\omega \sim 1/\tau$. По этой причине подобная процедура экстраполяции может приводить к неправильному ответу в области параметров $T\tau \gg 1$ (что соответствует пределу низких температур).

3.5.1 Интерференционные поправки

Как обсуждалось выше, помимо диаграммы, изображённой на рисунке 3.2 для коррелятора токов энергии, имеются также и “интерференционные поправки” от вершины взаимодействия (3.18), соединяющие верхнюю и нижнюю функции Грина. Роль интерференционных поправок к проводимости исследовалась также в работе [10] в области слабого взаимодействия $|K - 1| \ll 1$; в этой работе было показано, что интерференционные поправки при достаточно *высокой* температуре (а именно, в области $T \geq \tau^{-1}(T)(K - 1)^{-2}$) малы. Этот результат можно попробовать применить и к нашему случаю; поскольку у нас $|K - 1| \sim 1$, этот критерий соответствует попросту $T\tau \gg 1$; в нашем случае в делокализо-

ванной области $K > 3/2$ этот критерий выполняется всегда, в том числе и в пределе *низких* температур. Тем самым, на качественном уровне можно ожидать, что интерференционные поправки в нашей задаче оказываются всегда малы.

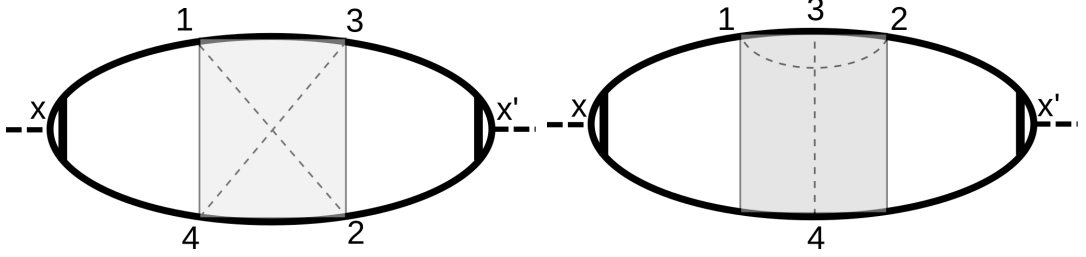


Рис. 3.3: Нетривиальные поправки к коррелятору тока энергии $\chi^{(E)}$. Серая область соответствует усреднению нелинейных вершин.

Перейдём теперь от качественных рассуждений к непосредственным вычислениям. Из-за векторной структуры токовой вершины, диаграмма с одной линией, соединяющей верхний и нижний пропагатор тождественно зануляется. Поэтому в наинизшем порядке имеются две диаграммы, соответствующие рисунку 3.3, которым соответствует следующее аналитическое выражение:

$$\begin{aligned} \delta\chi_E(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{1}{2} \left(\frac{iD}{\pi^2\alpha^2} \right)^2 \int dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dy dz \times \\ &\times \left\langle \partial_t \phi_{cl}(\mathbf{x}) \nabla \phi_{cl}(\mathbf{x}) (\partial_t \phi_{cl}(\mathbf{x}') \nabla \phi_q(\mathbf{x}') + \partial_t \phi_q(\mathbf{x}') \nabla \phi_{cl}(\mathbf{x}')) \times \right. \\ &\times \cos(2\phi_{cl}(y, t_1) - 2\phi_{cl}(y, t_2)) \sin \phi_q(y, t_1) \sin \phi_q(y, t_2) \times \\ &\left. \times \cos(2\phi_{cl}(z, t_3) - 2\phi_{cl}(z, t_4)) \sin \phi_q(z, t_3) \sin \phi_q(z, t_4) \right\rangle_0 \quad (3.33) \end{aligned}$$

Это выражение оказывается очень громоздким, чтобы с ним работать. Однако общая структура этого выражения, в силу существенной нелинейности вершин, такова, что оно содержит факторы вида $e^{2i(G_K(t_i-t_j)-G_K(0))} \propto 1/\sinh^{2K} \pi T(t_i-t_j)$. Эти факторы означают, что точки рассеяния, относящиеся к “серым областям” на рисунках 3.3, отстоят друг от друга по временам на времена порядка $|t_i-t_j| \sim 1/T$. С другой стороны, у жирных линий, которые соответствуют одетым пропагаторам, характерный масштаб времён равен τ , которое, как мы выяснили, сильно больше $1/T$. Поэтому, с точки зрения масштабов времени, в ведущем порядке по малому параметру $1/T\tau$ всю серую область можно эффективно “стянуть” в одну точку, что приводит к диаграмме, изображённой на рисунке 3.4.

Однако уже эта “эффективная” диаграмма зануляется в силу векторной структуры токовых вершин. Из такого рассуждения мы заключаем, что интерференционные поправки присутствуют, но они действительно малы по параметру $1/T\tau(T)$, который в области $K > 3/2$ всегда мал в пределе низких температур.

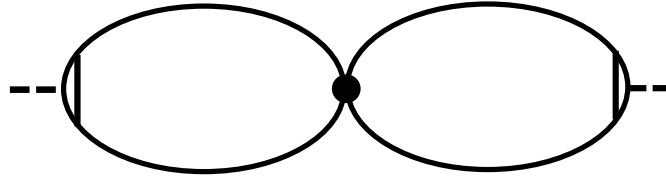


Рис. 3.4: Эффективный вид диаграммы для поправки к коррелятору токов энергии, в ведущем порядке по $1/T\tau(T) \ll 1$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. В силу существенной нелинейности вершины взаимодействия плазмонов и случайного потенциала, рассеяние на случайном потенциале оказывается само по себе неупругим процессом. Полученный результат показывает, что этой «врождённой» неупругости уже оказывается достаточно для дефазировки, и в связи с чем слаболокализационные поправки оказываются существенно слабыми, даже при самых низких температурах.

Глава 4

Заключение

В этой работе исследовались свойства возбуждений одномерной анизотропной XXZ-цепочки при ненулевой температуре, при наличии в ней беспорядка в виде случайных магнитных полей вдоль оси Z. Посредством преобразования Йордана-Вигнера спиновая задача (1.1) может быть переформулирована в терминах модели сильно взаимодействующих одномерных фермионов в случайном потенциале, гамильтониан которой записывается как (1.4). Низкоэнергетические возбуждения такой системы описываются моделью жидкости Латтинджера, которая описывает коллективные возбуждения фермионной плотности — плазмоны. Спектр возбуждений имеет две ветви, описывающее поведение «левых» и «правых» квазичастиц, в первом приближении движущихся с постоянной групповой скоростью. Модель жидкости Латтинджера существенно опирается на процедуру линеаризации спектра элементарных возбуждений, и эффекты от нелинейности спектра приводят к взаимодействию элементарных возбуждений, и, как следствие, к их затуханию. Такое затухание происходит даже в «чистом» случае, при отсутствии беспорядка. Однако в силу линейности закона дисперсии, стандартная теория возмущений оказывается неприменимой при описании распада на квазичастицы с той же ветви спектра, что и исходная. Это связано с тождественным совпадением законов сохранения энергии и импульса из-за линейности спектра, и приводит к дельта-функциональному поведению величины $\Gamma(\omega, q) \propto \delta(\omega - uq)$, которая, будучи взятой на массовой поверхности $\omega = uq$, должна описывать время жизни квазичастиц.

В разделе 2 этой работы была построена самосогласованная процедура, при которой учитывалось «одевание» квазичастиц — продуктов распада. Такая про-

цедура соответствует суммированию бесконечного ряда диаграмм Фейнмана, и приводит к конечному ответу, который неаналитическим образом зависит от константы связи и энергии. Были получены ответы для величины $\Gamma(\omega)$ в пределе низких энергий $\omega \ll T$ в двух предельных случаях — при наличии и отсутствии магнитного поля, направленного вдоль оси z , которые даются формулами (2.55) и (2.49). Наличие такого магнитного поля разрушает симметрию $z \mapsto -z$, которая отвечает характеру нелинейности спектра квазичастиц, а именно, $\epsilon(q) = uq + \lambda q^3$ при наличии такой симметрии, и $\epsilon(q) = uq + q^2/2m^*$ при её отсутствии (в случае общего положения). В том же разделе были исследованы спиновые корреляционные функции, и рассмотрено, как учёт наличия затухания квазичастиц модифицирует асимптотическое их поведение на больших временах.

При исследовании поправок к скелетным диаграммам, учтённым описанной процедурой, было показано, что диаграммы, возникающие в старших порядках теории возмущений, не содержат малого параметра по отношению к уже учтённым — во всяком случае, так происходит при наличии ненулевого магнитного поля. Вклад более сложных диаграмм, так же как и подобных поправок при отсутствии магнитного поля, ещё предстоит выяснить в будущем.

Наличие слабого беспорядка в этой системе учитывается в рамках процедуры ренормгруппы и приводит к фазовой диаграмме, изображённой на рисунке 1.3. В области, где беспорядок иррелевантен в смысле ренормгруппы («делокализованная область», в которой параметр Латтинджера $K > 3/2$), последний допускает учёт в рамках стандартной теории возмущений. Это приводит к конечной скорости релаксации импульса $1/\tau$, даваемой формулой (1.14), и которое в пределе $\omega \ll T$ не зависит от энергии, но зависит от температуры как T^{2K-2} . Наличие этого затухания приводит к конечным ответам для спиновой проводимости и теплопроводности, формулы (3.28) и (3.32). Их отношение описывается модифицированным законом Видемана-Франца, и результат для числа Лоренца, которое входит в этот закон, оказывается иным, чем предсказывалось ранее в работе [19].

В работе также проведено рассмотрение интерференционных поправок к выражению для коэффициента теплопроводности. Оказывается, что наличие «встроенной» неупругости при рассеянии плазмонов на беспорядке, которая

связана с нелинейным характером их взаимодействия со случайным потенциалом, оказывается достаточно для дефазировки и отсутствия слабой локализации. А именно, анализ диаграмм, описывающих такие поправки, показывает, что они малы по параметру $1/T\tau$. Этот параметр ведёт себя как функция температуры как T^{2K-3} , и оказывается всегда мал в пределе низких температур $T \ll J$ в исследуемой «делокализованной» области $K > 3/2$.

В дальнейшем планируется работа по исследованию совместных эффектов от рассеяния на беспорядке и нелинейности спектра. Процессы рассеяния вперёд в рамках линейного спектра никак не влияют на транспортные свойства системы и могут быть убраны тривиальным фазовым сдвигом (1.11). Однако наличие нелинейных вершин приводит к тому, что такой сдвиг «генерирует» новые члены в Гамильтониане, которые, в частности, приводят к дополнительным процессам рассеяния плазмонов. В области параметров $K > 3/2$, где беспорядок в виде рассеяния назад оказывается подавленным, может существовать область, где совместные эффекты от процессов рассеяния вперёд и нелинейности спектра оказываются доминирующими. Для предварительной оценки области параметров, приведём следующие соображения. Характерные ширины уровней, $1/\tau \propto T^{2-2K}$, следует сравнивать с характерной же нелинейностью спектра $\epsilon \sim uk^3a^2 \sim T^3a^2/u^2$. Такое сравнение показывает, что при $K > 5/2$, что соответствует параметру анизотропии $\Delta > \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.81$, нелинейность спектра оказывается всегда важной при низких температурах.

Глава 5

Список литературы

- [1] T. Giamarchi, “*Quantum Physics In One Dimension*”, Oxford Press (2004)
- [2] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, “*Курс теоретической физики. Статистическая физика. Часть 2*” (том 9), Москва, ФИЗМАТЛИТ (2004)
- [3] S. Tomonaga, “*Remarks on Bloch’s Method of Sound Waves applied to Many-Fermion Problems*”, Progress of Theoretical Physics, Vol.5, No.4 (1950)
- [4] F.D.M. Haldane, “*Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids*”, J. Phys. C: Solid State Phys. 14, 2585 (1981)
- [5] Sergei Lukyanov, “*Low energy effective Hamiltonian for the XXZ spin chain*”, Nuclear Physics B 522, 533-549 (1998)
- [6] Adilet Imambekov, Thomas L. Schmidt, and Leonid I. Glazman, “*One-dimensional quantum liquids: Beyond the Luttinger liquid paradigm*”, Reviews of Modern Physics, Vol. 84, 1253 (2012)
- [7] D. N. Aristov, “*Luttinger liquids with curvature: Density correlations and Coulomb drag effect*”, Phys. Rev. B 76, 085327 (2007)
- [8] J. Sirker, R.G. Pereira, and I. Affleck, “*Conservation laws, integrability, and transport in one-dimensional quantum systems*”, Phys.Rev. B 83, 035115 (2011)
- [9] T. Giamarchi and H.J. Schulz, “*Anderson localization and interactions in one-dimensional metals*”, Phys.Rev. B 37, 325 (1987)

- [10] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, “*Electron transport in a disordered Luttinger liquid*”, Phys. Rev. B 75, 085421 (2007)
- [11] A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, and V. M. Vinokur, “*Transport of Charge-Density Waves in the Presence of Disorder: Classical Pinning Versus Quantum Localization*”, Phys. Rev. Lett. 99, 156405 (2007)
- [12] Igor Poboiko and Mikhail Feigel'man, “*Thermal transport in disordered one-dimensional spin chains*”, Phys. Rev. B 92, 235448 (2015)
- [13] P. Schmitteckert, T. Schulze, C. Schuster, P. Schwab, and U. Eckern, “*Anderson Localization versus Delocalization of Interacting Fermions in One Dimension*”, Phys. Rev. Lett. 80, 560 (1998)
- [14] Jonathan M. Carter and Angus MacKinnon, “*Disorder and interactions in one-dimensional systems*”, Phys. Rev. B 72, 024208 (2005)
- [15] Alex Kamenev and Alex Levchenko, “*Keldysh technique and non-linear σ -model: basic principles and applications*”, Advances in Physics, Vol. 58, Issue 3, pp. 197-319 (2009)
- [16] A.F. Andreev, “*The hydrodynamics of two- and one-dimensional liquids*”, Sov. Phys. JETP Vol. 51, No. 5, p. 1038 (1980)
- [17] J.M. Luttinger, “*Theory of Thermal Transport Coefficients*”, Phys.Rev. 135, A1506 (1964)
- [18] Л.С. Левитов, А.В. Шитов, “*Функции Грина. Задачи и решения*”, Москва, ФИЗМАТЛИТ (2003)
- [19] M.-R. Li and E.Orignac, “*Heat conduction and Wiedemann-Franz law in disordered Luttinger liquids*”, Europhys.Lett., 60, 432-438 (2002)
- [20] C.L. Kane and M.P.A. Fisher, “*Thermal Transport in a Luttinger Liquid*”, Phys.Rev.Lett 76, 3192 (1996)
- [21] K.V. Samokhin, “*Lifetime of excitations in a clean Luttinger liquid*”, J. Phys.: Condens. Matter 10, L533-L538 (1998)

Приложение А

Вычисление

диаграммы-поправки к

времени жизни квазичастиц

Проведём вычисление диаграммы, изображённой на рисунке 2.3. Аналитическое выражение, соответствующее этой диаграмме, состоит из 10 различных комбинаций опережающих, запаздывающих и Келдышевских функций Грина. Однако в силу симметрии исходной диаграммы, эти десять рассмотренных членов разбиваются на 5 пар, получаемых друг из зеркальным отражением относительно горизонтальной оси симметрии. Такая операция соответствует одновременной перестановке $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_4) \leftrightarrow (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_5)$, а также замене функции Грина, соответствующей импульсу \mathbf{q}_3 согласно $G_{ret} \leftrightarrow G_{adv}$.

Тем самым можно следить за 5 слагаемыми, подразумевая процедуру симметризации по описанной перестановке, которую можно будет произвести в самом конце.

С учётом вышесказанного, мы рассматриваем следующие два выражения

для собственной энергетической части:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}(\mathbf{q}) = & -4\alpha_1^4 \int \frac{d^2\mathbf{q}_i}{(2\pi)^2} \left(G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_K(\mathbf{q}_2)G_K(\mathbf{q}_3)G_{ret}(\mathbf{q}_4)G_{adv}(\mathbf{q}_5)+ \right. \\ & + G_K(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_{adv}(\mathbf{q}_3)G_{ret}(\mathbf{q}_4)G_K(\mathbf{q}_5)+ \\ & + G_K(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_{adv}(\mathbf{q}_3)G_K(\mathbf{q}_4)G_{ret}(\mathbf{q}_5)+ \\ & + G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_{ret}(\mathbf{q}_3)G_{ret}(\mathbf{q}_4)G_{adv}(\mathbf{q}_5)+ \\ & \left. + G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_K(\mathbf{q}_3)G_{ret}(\mathbf{q}_4)G_K(\mathbf{q}_5) \right) \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(sym)}(\mathbf{q}) = & -4\alpha_1^4 \int \frac{d^2\mathbf{q}_i}{(2\pi)^2} \left(G_K(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_K(\mathbf{q}_3)G_{adv}(\mathbf{q}_4)G_{ret}(\mathbf{q}_5)+ \right. \\ & + G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_K(\mathbf{q}_2)G_{ret}(\mathbf{q}_3)G_K(\mathbf{q}_4)G_{ret}(\mathbf{q}_5)+ \\ & + G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_K(\mathbf{q}_2)G_{ret}(\mathbf{q}_3)G_{ret}(\mathbf{q}_4)G_K(\mathbf{q}_5)+ \\ & + G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_{adv}(\mathbf{q}_3)G_{adv}(\mathbf{q}_4)G_{ret}(\mathbf{q}_5)+ \\ & \left. + G_{ret}(\mathbf{q}_1)G_{ret}(\mathbf{q}_2)G_K(\mathbf{q}_3)G_K(\mathbf{q}_4)G_{ret}(\mathbf{q}_5) \right) \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Интегрирование производится по двум энергиям и импульсам, которые не закреплены законами сохранения:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4, \quad \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \quad (\text{A.3})$$

В качестве пропагаторов, входящих в это выражение, мы будем использовать “одетые” пропагаторы, даваемые выражениями (2.8). Мы будем использовать краткие обозначения $\epsilon_i \equiv \omega_i - uq_i$ и $\Gamma_i \equiv \Gamma(\omega_i)$. Сразу же оказывается удобным перейти от интегрирования по q_i (импульсам) к интегрированию по ϵ_i ; тем самым $q_i = (\omega_i - \epsilon_i)/u$.

Первое слагаемое В качестве независимых импульсов возьмём \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_3 . Имеем следующий вклад в собственную энергетическую часть:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(1)}(\mathbf{q}) = & 16\alpha_1^4 \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{d\epsilon_1}{2\pi u} \frac{d\epsilon_3}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_2) f(\omega_3) \times \\ & \times \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{(\epsilon_1 + i\Gamma_1)(\epsilon_2^2 + \Gamma_2^2)(\epsilon_3^2 + \Gamma_3^2)(\epsilon_4 + i\Gamma_4)(\epsilon_5 - i\Gamma_5)} \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Возьмём сперва интеграл по ϵ_1 с помощью вычетов. Используя законы сохранения (A.3) (которые в таком же виде верны и для ϵ_i), мы видим, что интеграл содержит полюса при следующих значениях ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = -i\Gamma_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon \pm i\Gamma_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_3 - i\Gamma_4, \quad \epsilon_1 = \epsilon + \epsilon_3 - i\Gamma_5 \quad (\text{A.5})$$

Удобно замкнуть контур интегрирования через верхнюю комплексную полу-плоскость, выразив сам интеграл через вычет в единственном полюсе $\epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(1)}(\mathbf{q}) &= \frac{8\alpha_1^4}{u} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{d\epsilon_3}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_2) f(\omega_3) \times \\ &\times \frac{\Gamma_3}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2) (\epsilon_3^2 + \Gamma_3^2) (\epsilon - \epsilon_3 + i\Gamma_2 + i\Gamma_4) (\epsilon_3 - i\Gamma_2 - i\Gamma_5)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Теперь проведём интегрирование по ϵ_3 . Полюса:

$$\epsilon_3 = \pm i\Gamma_3, \quad \epsilon_3 = \epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_4, \quad \epsilon_3 = i\Gamma_2 + i\Gamma_5. \quad (\text{A.7})$$

Замыкаем контур снизу, берём вычет в полюсе $\epsilon_3 = -i\Gamma_3$ и получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(1)}(\mathbf{q}) &= \frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_2) f(\omega_3) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2) (\epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3 + i\Gamma_4) (-i\Gamma_2 - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Напомним, что затухание на массовой поверхности определяется согласно соотношению (2.7), и в эту формулу нужно положить $\epsilon = 0$. Получаем следующий вклад:

$$\Gamma^{(1)}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_3 f(\omega_2) f(\omega_3) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2) (\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) (\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.9})$$

(тут в числителе мы заменили $q_i \mapsto \omega_i/u$, пренебрегая малыми поправками за счёт Γ_i).

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(2)}(\mathbf{q}) &= 16\alpha_1^4 \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\epsilon_1}{2\pi u} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{d\epsilon_3}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_5) \times \\ &\times \frac{\Gamma_1 \Gamma_5}{(\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2) (\epsilon_2 + i\Gamma_2) (\epsilon_3 - i\Gamma_3) (\epsilon_4 + i\Gamma_4) (\epsilon_5^2 + \Gamma_5^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

В интеграле по ϵ_3 , полюса:

$$\epsilon_3 = i\Gamma_3, \quad \epsilon_3 = \epsilon_1 + i\Gamma_4, \quad \epsilon_3 = \epsilon_1 - \epsilon \pm i\Gamma_5. \quad (\text{A.11})$$

Замыкаем контур снизу, садим на полюс $\epsilon_3 = \epsilon_1 - \epsilon - i\Gamma_5$, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(2)}(\mathbf{q}) &= \frac{8\alpha_1^4}{u} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\epsilon_1}{2\pi u} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_5) \times \\ &\times \frac{\Gamma_1}{(\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)(\epsilon_2 + i\Gamma_2)(\epsilon_1 - \epsilon - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)(\epsilon + i\Gamma_4 + i\Gamma_5)} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

В интеграле по ϵ_1 , полюса:

$$\epsilon_1 = \pm i\Gamma_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_3 + i\Gamma_5 \quad (\text{A.13})$$

Замыкаем контур снизу, садим на полюс $\epsilon_1 = -i\Gamma_1$, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(2)}(\mathbf{q}) &= \frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_5) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(-\epsilon - i\Gamma_1 - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)(\epsilon + i\Gamma_4 + i\Gamma_5)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Для вклада в Γ это соответствует:

$$\Gamma^{(2)}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_3 f(\omega_1) f(\omega_5) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.15})$$

Третье слагаемое Третий вклад отличается от предыдущих двух тем, что расположение полюсов в интегралах по импульсам не позволяет замкнуть контур так, чтобы внутри оказался только один полюс. Из-за чего это слагаемое даст два разных вклада. Кроме того, в этом слагаемом удобнее интегрировать не по паре свободных импульсов $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)$, как в предыдущих двух, а по паре $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_4)$. Тут оказывается удобным первую Келдышевскую функцию Грина записать через $\text{Im } G_{ret}$, а вторую — через $G_{ret} - G_{adv}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(3)}(\mathbf{q}) &= i8\alpha_1^4 \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\epsilon_1}{2\pi u} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_4) \times \\ &\times \frac{\Gamma_1}{(\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)(\epsilon_2 + i\Gamma_2)(\epsilon_3 - i\Gamma_3)(\epsilon_5 + i\Gamma_5)} \left[\frac{1}{\epsilon_4 + i\Gamma_4} - \frac{1}{\epsilon_4 - i\Gamma_4} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

В интеграле по ϵ_1 , полюса расположены:

$$\epsilon_1 = \pm i\Gamma_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_4 + i\Gamma_3. \quad (\text{A.17})$$

Замыкаем контур снизу, садим на полюс $\epsilon_1 = -i\Gamma_1$, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(3)}(\mathbf{q}) &= i12 \frac{\alpha_1^4}{u} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_4) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(-\epsilon_4 - i\Gamma_1 - i\Gamma_3)(\epsilon_5 + i\Gamma_5)} \left[\frac{1}{\epsilon_4 + i\Gamma_4} - \frac{1}{\epsilon_4 - i\Gamma_4} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Как было анонсировано выше, тут имеются два вклада — в зависимости от того, какой из членов взять в скобках.

В первом вкладе (получаемом из первого члена в скобках) в интеграле по ϵ_4 полюса расположены согласно:

$$\epsilon_4 = -i\Gamma_1 - i\Gamma_3, \quad \epsilon_4 = -i\Gamma_4, \quad \epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_5, \quad (\text{A.19})$$

поэтому, мы замыкаем контур сверху, садим интеграл на полюс $\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_5$ и получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(3.1)}(\mathbf{q}) &= \frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_4) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(-\epsilon - i\Gamma_1 - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)(\epsilon + i\Gamma_4 + i\Gamma_5)}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

что соответствует вкладу в Γ :

$$\Gamma^{(3.1)}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_1) f(\omega_4) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.21})$$

Во вкладе, который получается из второго члена в скобках, при интегрировании по ϵ_4 имеются полюса:

$$\epsilon_4 = -i\Gamma_1 - i\Gamma_3, \quad \epsilon_4 = i\Gamma_4, \quad \epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_5. \quad (\text{A.22})$$

Поэтому интеграл удобно замкнуть через низ, “посадив” его на полюс при $\epsilon_4 = -i\Gamma_1 - i\Gamma_3$. Получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(3.2)}(\mathbf{q}) &= \frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_1) f(\omega_4) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(-i\Gamma_1 - i\Gamma_3 - i\Gamma_4)(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_3 + i\Gamma_5)} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

что соответствует следующему вкладу в Γ :

$$\Gamma^{(3.2)}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_1) f(\omega_4) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.24})$$

Четвёртое слагаемое Это слагаемое отличается от предыдущих тем, что оно не содержит Келдышевских функций Грина, а значит, ответ не будет содержать функций распределения. Выражение для него следующее:

$$\Sigma_{ret}^{(4)}(\mathbf{q}) = -4\alpha_1^4 \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\epsilon_1}{2\pi u} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} \times \frac{1}{(\epsilon_1 + i\Gamma_1)(\epsilon_2 + i\Gamma_2)(\epsilon_3 + i\Gamma_3)(\epsilon_4 + i\Gamma_4)(\epsilon_5 - i\Gamma_5)} \quad (\text{A.25})$$

В интеграле ϵ_1 имеются следующие полюса:

$$\epsilon_1 = -i\Gamma_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_4 - i\Gamma_3. \quad (\text{A.26})$$

Замыкаем контур сверху, садим его на полюс $\epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2$ и получаем:

$$\Sigma_{ret}^{(4)}(\mathbf{q}) = i \frac{4\alpha_1^4}{u} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} \times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(\epsilon - \epsilon_4 + i\Gamma_2 + i\Gamma_3)(\epsilon_4 + i\Gamma_4)(\epsilon_5 - i\Gamma_5)} \quad (\text{A.27})$$

В интеграле по ϵ_4 имеются полюса:

$$\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3, \quad \epsilon_4 = -i\Gamma_4, \quad \epsilon_4 = \epsilon - i\Gamma_5. \quad (\text{A.28})$$

Замыкаем контур сверху, садим на полюс $\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3$, получаем:

$$\Sigma_{ret}^{(4)}(\mathbf{q}) = \frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} \times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(\epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3 + i\Gamma_4)(-i\Gamma_2 - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)} \quad (\text{A.29})$$

Соответствующий вклад в ширину Γ выражается следующим образом:

$$\Gamma^{(4)}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.30})$$

Пятое слагаемое Пятое слагаемое похоже на третье в том смысле, что тут при интегрировании по обоим импульсам оказывается невозможно замкнуть контур так, чтобы внутри оказался один полюс. Из-за чего вклада в Γ от этого слагаемого, вообще говоря, будет четыре.

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(5)}(\mathbf{q}) &= -4\alpha_1^4 \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\epsilon_1}{2\pi u} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_3) f(\omega_5) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon_1 + i\Gamma_1)} \left[\frac{1}{\epsilon_2 + i\Gamma_2} - \frac{1}{\epsilon_2 - i\Gamma_2} \right] \frac{1}{(\epsilon_3 + i\Gamma_3)(\epsilon_4 + i\Gamma_4)} \left[\frac{1}{\epsilon_5 + i\Gamma_5} - \frac{1}{\epsilon_5 - i\Gamma_5} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

При интегрировании по ϵ_1 возникнут два вклада, соответствующие взятию первого или второго члена из первых скобок; эти два вклада затем дадут два под-вклада, соответствующие взятию разных членов из второй скобки.

В первом вкладе при интегрировании по ϵ_1 имеются следующие полюса:

$$\epsilon_1 = -i\Gamma_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_4 - i\Gamma_3, \quad (\text{A.32})$$

поэтому, замыкая контур сверху и беря вычет в полюсе $\epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2$ мы получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(5.1)}(\mathbf{q}) &= i \frac{4\alpha_1^4}{u} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_3) f(\omega_5) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(\epsilon - \epsilon_4 + i\Gamma_2 + i\Gamma_3)(\epsilon_4 + i\Gamma_4)} \left[\frac{1}{\epsilon_5 + i\Gamma_5} - \frac{1}{\epsilon_5 - i\Gamma_5} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

В свою очередь тут интеграл по ϵ_4 даст два под-вклада, соответствующие взятию первого или второго члена из оставшейся скобки. В первом таком под-вкладе имеются полюса:

$$\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3, \quad \epsilon_4 = -i\Gamma_4, \quad \epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_5 \quad (\text{A.34})$$

поэтому замыкая контур снизу и сядя на полюс $\epsilon_4 = -i\Gamma_4$, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(5.1.1)}(\mathbf{q}) &= \frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_3) f(\omega_5) \times \\ &\times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(\epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3 + i\Gamma_4)(\epsilon + i\Gamma_4 + i\Gamma_5)}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Это соответствует вкладу в Γ (обратим внимание, он получается противоположного знака!):

$$\Gamma^{(5.1.1)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_3) f(\omega_5) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.36})$$

Во втором под-вкладе первого вклада интеграл по ϵ_4 имеет следующие полюса:

$$\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3, \quad \epsilon_4 = -i\Gamma_4, \quad \epsilon_4 = \epsilon - i\Gamma_5, \quad (\text{A.37})$$

и, соответственно, замыкая контур сверху и сядя интеграл на полюс $\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3$, получаем второй под-вклад:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(5.1.2)}(\mathbf{q}) = & -\frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_3) f(\omega_5) \times \\ & \times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(\epsilon + i\Gamma_2 + i\Gamma_3 + i\Gamma_4)(-i\Gamma_2 - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)}, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

и, соответственно:

$$\Gamma^{(5.1.2)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_3) f(\omega_5) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.39})$$

Рассмотрим теперь второй большой вклад (из второго слагаемого в первых скобках). В нём имеются полюса по ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = -i\Gamma_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon + i\Gamma_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_4 + i\Gamma_3, \quad (\text{A.40})$$

поэтому замыкая контур снизу и сядя его на полюс $\epsilon_1 = -i\Gamma_1$, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(5.2)}(\mathbf{q}) = & -i\frac{4\alpha_1^4}{u} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{d\epsilon_4}{2\pi u} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_3) f(\omega_5) \times \\ & \times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(-\epsilon_4 - i\Gamma_1 - i\Gamma_3)(\epsilon_4 + i\Gamma_4)} \left[\frac{1}{\epsilon_5 + i\Gamma_5} - \frac{1}{\epsilon_5 - i\Gamma_5} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Сразу заметим, что в скобках только первое слагаемое даст вклад, поскольку во втором полюсы расположены с одной стороны и в силу причинности при интегрировании по импульсу он занулится. В первом же слагаемом полюса по ϵ_4 расположены согласно:

$$\epsilon_4 = -i\Gamma_1 - i\Gamma_3, \quad \epsilon_4 = -i\Gamma_4, \quad \epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_5. \quad (\text{A.42})$$

Контур замыкается сверху, интеграл садится на полюс $\epsilon_4 = \epsilon + i\Gamma_5$ и получается:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ret}^{(5.2)}(\mathbf{q}) = & -\frac{4\alpha_1^4}{u^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5}{(2\pi)^5} f(\omega_3) f(\omega_5) \times \\ & \times \frac{1}{(\epsilon + i\Gamma_1 + i\Gamma_2)(-\epsilon - i\Gamma_1 - i\Gamma_3 - i\Gamma_5)(\epsilon + i\Gamma_5 + i\Gamma_4)} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Это соответствует

$$\Gamma^{(5.2)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_3) f(\omega_5) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.44})$$

Симметризация Приведём без вывода выражение, которые соответствуют симметричным к уже написанным вкладам:

$$\Gamma^{(6)}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_1) f(\omega_3) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.45})$$

$$\Gamma^{(7)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_2) f(\omega_4) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_4 + \Gamma_5)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)} \quad (\text{A.46})$$

$$\Gamma^{(8.1)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_2) f(\omega_5) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_4 + \Gamma_5)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)} \quad (\text{A.47})$$

$$\Gamma^{(8.2)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_2) f(\omega_5) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.48})$$

$$\Gamma^{(9)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.49})$$

$$\Gamma^{(10.1.1)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_3) f(\omega_4) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_4 + \Gamma_5)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)} \quad (\text{A.50})$$

$$\Gamma^{(10.1.2)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_3) f(\omega_4) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_4 + \Gamma_5)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.51})$$

$$\Gamma^{(10.2)}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 f(\omega_3) f(\omega_4) \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.52})$$

Приведение подобных членов Соберём подобные члены; можно заметить, что имеются 4 группы по 4 члена с одинаковыми знаменателями. Первая такая группа состоит из членов (A.9), (A.30), (A.44) и (A.48). Они собираются в:

$$\Gamma^{(1)'}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 (1 + f(\omega_2)f(\omega_3) - f(\omega_3)f(\omega_5) - f(\omega_2)f(\omega_5)) \times \\ \times \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.53})$$

Вторая группа состоит из членов (A.24), (A.45), (A.49) и (A.52):

$$\Gamma^{(2)'}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 (f(\omega_1)f(\omega_4) + f(\omega_1)f(\omega_3) - 1 - f(\omega_3)f(\omega_4)) \times \\ \times \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.54})$$

Третья группа включает члены (A.15), (A.21), (A.36) и (A.51):

$$\Gamma^{(3)'}(\omega) = \frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 (f(\omega_1) - f(\omega_3))(f(\omega_4) + f(\omega_5)) \times \\ \times \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.55})$$

Ну и, наконец, последняя группа включает оставшиеся члены (A.39), (A.46), (A.47) и (A.50):

$$\Gamma^{(4)'}(\omega) = -\frac{\alpha_1^4 \omega}{64(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 (f(\omega_2) + f(\omega_3))(f(\omega_4) + f(\omega_5)) \times \\ \times \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.56})$$

Обратим внимание, что если в выражениях для $\Gamma^{(2)'}$ и $\Gamma^{(4)'}$ провести замену в интеграле, $\omega_1 \mapsto \omega - \omega_1$ и $\omega_4 \mapsto \omega - \omega_4$ (что соответствует перемене $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$, $\omega_4 \leftrightarrow \omega_5$ и $\omega_3 \mapsto -\omega_3$), то они тождественно совпадут с $\Gamma^{(1)'}$ и $\Gamma^{(3)'}$ соответственно.

Проведём теперь с учётом этого анализ для случая высоких температур, когда мы можем заменить функции распределения $f(\omega) \approx \frac{2T}{\omega}$. При этом, комбинация функций распределения в первом члене даст в ведущем порядке по T/ω следующий вклад:

$$f(\omega_1)f(\omega_4) + f(\omega_1)f(\omega_3) - 1 - f(\omega_3)f(\omega_4) \approx 4T^2 \frac{\omega_3 + \omega_4 - \omega_1}{\omega_1 \omega_3 \omega_4} = 0 \quad (\text{A.57})$$

(последнее равенство происходит в силу закона сохранения энергии). Соответствующая комбинация для четвёртого члена даёт:

$$(f(\omega_2) + f(\omega_3))(f(\omega_4) + f(\omega_5)) = \frac{4T^2\omega}{\omega_2\omega_3\omega_4} \quad (\text{A.58})$$

Тем самым, полный ответ в пределе $T \gg \omega$ в ведущем порядке даётся:

$$\delta\Gamma(\omega) = -\frac{\alpha_1^4\omega^2T^2}{8(\pi u)^8} \int d\omega_1 d\omega_4 \frac{\omega_1\omega_5}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)(\Gamma_4 + \Gamma_5)} \quad (\text{A.59})$$

После обезразмеривания и подстановки “невозмущённого” значения $\Gamma(\omega)$, получается вклад того же порядка:

$$\delta\Gamma(\omega) = C \frac{|\alpha_1|\omega^{3/2}T^{1/2}}{u^2} \sim \Gamma(\omega) \quad (\text{A.60})$$

Константа C определяется как из префактора, так и из обезразмеренного интеграла, и её значение может быть найдено только численно. Её значение равно $C \approx -3 \cdot 10^{-2}$ — она оказывается почти в два раза меньше, чем невозмущённое значение $C_1 \approx 7 \cdot 10^{-2}$, которое входило в выражение для $\Gamma(\omega)$ (2.49).